kartesisches Produkt: $A \times B := \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$ mit $a_i \in A, b_i \in B, i \in \mathbb{N}$
Potenzmenge (Menge aller Teilmengen): 2^A
Vektorräume: Eine Menge V mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$ und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
heißt **Vektorraum**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{lll}
1. & \forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w) & \textit{Assoziativität} \\
2. & \forall u, v \in V : u + v = v + u & \textit{Kommutativität} \\
3. & \exists \vec{0} \in V : \vec{0} + v = v & \textit{neutrales Element} \\
4. & \forall v \in V : \exists(-v) \in V : v + (-v) = \vec{0} & \textit{inverses Element}
\end{array}\right\} \textit{der Addition}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
5. & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in V : (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) & \textit{Assoziativität} \\
6. & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v & \multirow{2}{*}{$\Big\}$ \textit{Distributivgesetze}} \\
7. & \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall u, v \in V : \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v & \\
8. & \forall v \in V : 1v = v & \textit{neutrales Element}
\end{array}\right\} \textit{der Multiplikation}$$

Untervektorraum: Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine <u>nichtleere Teilmenge</u> $U \subset V$ heißt ein **Untervektorraum**, wenn $\forall u, v \in U \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\underline{v + u \in U}$ und $\underline{\lambda \cdot v \in U}$ sind. ($\Rightarrow U$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation.)
Durchschnitt: $A \bigcap B := \{x | x \in A, x \in B\}$
Schnittmenge: $\bigcap\limits_{M \in \mathbb{M}} M := \{x | \forall M \in \mathbb{M} : x \in M\}$
Vereinigung: $A \bigcup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$
Vereinigungsmenge: $\bigcup\limits_{M \in \mathbb{M}} M := \{x | \exists M \in \mathbb{M} : x \in M\}$
disjunkte Mengen: $A \bigcap B = \emptyset$

Lineare Hülle (die Linearkombination aller Elemente der Teilmenge): $span(A) = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i | k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A \right\}$

eine Linearkombination heißt <u>trivial</u> g.d.w.: $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ nur für $\forall \lambda_i = 0$ erfüllt ist.

Für den Vektorraum $(V, +, \cdot)$ und $A \subseteq V$ $(A \neq \emptyset)$ gilt:

A ist <u>linear unabhängig</u>, falls $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \neg\exists \lambda_i \neq 0 : \forall a_i \in A : \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \vec{0}$.

A ist <u>linear abhängig</u>, wenn $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \exists \lambda_i \neq 0 : \forall a_i \in A : \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \vec{0}$.

Basis-Menge: Es sei $(V, +, \cdot)$ ein <u>nichttrivialer</u> Vektorraum. Die Menge $A \subset V$ heißt <u>Basis-Menge</u>
falls sie: - linear unabhängig ist
- $span(A) = V$ gilt.
Die Basis des trivialen Vektorraums sei $\emptyset$.

Ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es eine endliche Menge $A \subset V$ gibt, so dass $span(A) = V$. Ist V endlich erzeugt, so heißt die Anzahl der Elemente seiner Basis <u>Dimension</u>; diese ist für jeden endlich erzeugten Vektorraum eindeutig.

Austauschsatz von Steinitz:
Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \cdot)$ und $A = \{w_1, ..., w_k\}$ eine linear unabhängige Menge mit $v_i, w_i \in V$. Dann gilt:

- $k \leq n$,
- es gibt (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$, so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j wieder eine Basis von V liefert.

Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$ lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

$\forall E, F \in V : E + F = \{e + f | e \in E \wedge f \in F\}$ mit allen möglichen Summen $e + f$. Ist V endlich erzeugt, so gilt: $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ (Dimensionssatz).

Koordinatenvektor: $B := (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ sei ein Basis-Tupel im Vektorraum $(V, +, \cdot)$, $\vec{w} \in V$. Der Koordinatenvektor des Vektors $\vec{w}$ in dieser Basis ist das n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{w}$.

Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$ mit $C_B(\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt <u>Koordinatenabbildung</u>.

Es seien $(V_1, +, \cdot)$ und $(V_2, +, \cdot)$ zwei Vektorräume; eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$ heißt <u>linear</u>, falls für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R}$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$,
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \cdot)$; dann ist die Koordinatenabbildung $C : V \to \mathbb{R}^n$, die den Vektor $\vec{v}$ auf seinen Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ abbildet, linear!

injektiv: $\forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \vee (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
surjektiv: $f(X) = Y \Leftrightarrow \forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
bijektiv: f ist injektiv und surjektiv.

Das **Bild einer Funktion** ist die Menge aller Funktionsbilder der Funktion.
Das **Urbild** eines Elements b der Zielmenge ist die Menge aller Elemente des Definitionsbereichs, deren Bild b ergibt.
Der **Kern** von f ist: $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V | f(v) = 0\}$.
Ist f linear, so gilt: $Kern_f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow f$ ist injektiv.

Die **Verkettung** (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist: $g \circ f := g(f(x))$.
$Id_A : A \to A : Id_A(a) = a \quad \forall a \in A$ heißt **identische Abbildung** (oder Identität).
Sei $f : A \to B$, dann heißt $g : B \to A$ eine **links-** (rechts-)**inverse** Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ $(f \circ g = Id_B)$.

Für $f: A \to B$ mit $A \neq \emptyset$ gilt:

- f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f hat eine Linksinverse;
- f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f hat eine Rechtsinverse.

Sei $f: A \to B$, dann gilt: f ist bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$, so dass $g \circ f = Id_A$ und $f \circ g = Id_B$; g ist eindeutig!

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f: V \to U$ heißt:

Monomorphismus	injektiv
Epimorphismus	surjektiv
Isomorphismus	bijektiv
Endomorphismus	$V = U$

.

Sei $f: V \to U$ ein Isomorphismus, dann ist auch die Inverse $f^{-1}: U \to V$ ein Isomorphismus.

Hauptsatz der linearen Algebra: Zwei endlichdimensionale Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. Oder: Jeder Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ n-dimensionale Vektorräume und $(v_1, ..., v_n)$ Basis-Tupel von V und $(u_1, ..., u_n)$ mit $u_1, ..., u_n \in U$. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to U$, so dass $f(v_i) = u_i \quad \forall i = 1, ..., n$.

1. Dimensionsformel: Sei $f: V \to U$ eine lineare Abbildung, dann gilt:

a) $Bild_f$ ist ein Untervektorraum von U,

b) $Kern_f$ ist ein Untervektorraum von V,

c) ist V endlichdimensional, so gilt: $\dim(V) = \dim(Bild_f) + \dim(Kern_f)$.

Ist $f: V \to V$ ein Endomorphismus mit einem endlichdimensionalen Vektorraum V, dann gilt:
f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv.

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, so ist eine $(m \times n)$-Matrix eine Abbildung $A: \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Das Bild von $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ ist dabei das, was im Schema an der ij-ten Stelle steht.

$$A_{m,n} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } m \text{ Zeilen und } n \text{ Spalten.}$$

Eine $(m \times n)$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; sie heißt Multiplikation ($f_A(v) = A \cdot v$):

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}\, x_1 + a_{m,2}\, x_2 + \cdots + a_{m,n}\, x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}\, x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} x_i \end{pmatrix}.$$

Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung. Und jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist die Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist (wobei e_i der i-te Vektor in der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist).

Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
Sind $f: A \to B$, $g: B \to C$ bijektiv, so ist auch $g \circ f: A \to C$ bijektiv.
Sind $f: A \to B$, $g: B \to C$ lineare Abbildungen, so ist auch $g \circ f: A \to C$ eine lineare Abbildung.

Seien $f_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $f_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikation mit einer $(k \times m)$-Matrix A, bzw. $(m \times n)$-Matrix B, dann heißt die $(k \times n)$-Matrix von $f_A \circ f_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ das **Produkt** von A und B und wird mit AB bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1,i} b_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{1,i} b_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} b_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} b_{i,n} \end{pmatrix}.$$

Merkregel:
Auf dem (i,j)-ten Platz des Produktes der $(k \times m)$-Matrix A und der $(m \times n)$-Matrix B steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ: $(AB)C = A(BC)$. (sofern definiert).

Seien A,B $(m \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := Av + Bv$ ist linear. Die Matrix dieser Abbildung heißt **Summe** von Matrizen und wird mit $A + B$ bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix , $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := \lambda f_A(v) := \lambda(Av)$ ist linear. Die Matrix dieser Abbildung heißt das **λ-fache** von A und wird λA bezeichnet:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{1,1} & \cdots & \lambda \cdot a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m,1} & \cdots & \lambda \cdot a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Die Menge der $(m \times n)$-Matrizen wird mit $Mat(m, n)$ bezeichnet. Die Standard-Basis darin bilden die Matrizen $B_{i,j}$, deren Einträge bis auf eine 1 an der Stelle (i, j) alle 0 sind.

$(n \times n)$-Matrizen heißen **quadratisch**. Die entsprechenden linearen Abbildungen sind Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ $(f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$. Das Produkt zweier $(n \times n)$-Matrizen ist auch eine $(n \times n)$-Matrix.

Eine $(n \times n)$-Matrix B heißt **inverse** Matrix zu einer $(n \times n)$-Matrix A, wenn $B \cdot A = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Existiert eine Inverse, so heißt die Matrix **invertierbar** oder **nichtausgeartet**.

Sei $A \in Mat(n, n)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist nichtausgeartet,
2. die Abbildung $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Isomorphismus,
3. die Spalten von A sind linear unabhängig.

Sind A, B nichtausgeartet, so ist auch $A \cdot B$ nichtausgeartet (iterativ auch für mehr beweisbar).
Auch A^{-1} ist dann nichtausgeartet und außerdem eindeutig.
Ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A \in Mat(n,n),\ x, b \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist $(x = A^{-1}b)$.

$$A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix** mit $A_{erw} \in Mat(m, n+1)$, $A \in Mat(m,n),\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$ und $A \cdot x = b$.

$Kern_A \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig.

Elementarmatrizen (in $Mat(n,n)$):

Typ I: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $i \neq j$: $E_{i,j}^{\lambda} := Id + \lambda B_{i,j}$.
Für $i \neq j$ addiert die Multiplikation von links mit $E_{i,j}^{\lambda}$ zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile.
Es gilt: $(E_{i,j}^{\lambda})^{-1} = E_{i,j}^{-\lambda}$.

Typ II: $i \in \{1, ..., n\}$ und $\lambda \neq 0$: $E_i^{\lambda} := Id + (\lambda - 1)B_{i,i}$.
Multiplikation von links mit E_i^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ.
Es gilt: $(E_i^{\lambda})^{-1} = E_i^{\frac{1}{\lambda}}$.

Typ III: $i, j \in \{1, ..., n\}$: $E_{i,j} := Id - B_{i,i} - B_{j,j} + B_{i,j} + B_{j,i}$.
Multiplikation von links mit $E_{i,j}$ vertauscht die i-te und die j-te Zeile.
Es gilt: $(E_{i,j})^{-1} = E_{i,j}$.

Jede Elementarmatrix ist nichtausgeartet. Ihre Inverse ist auch eine Elementarmatrix.
Jede nichtausgeartete $(n \times n)$-Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen.
Gauss-Jordan-Verfahren: $\begin{pmatrix} A & Id \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} Id & A^{-1} \end{pmatrix}$

Determinante:

Eine Abbildung $\det : Mat(n,n) \to \mathbb{R}$ heißt Determinantenabbildung, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- D1: Eine Determinante ist **linear in jeder Zeile**, d.h.:

$$\det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}.$$

- D2: Eine Determinante ist **alternierend**, d.h. stimmen zwei Zeilen der Matrix überein, so ist $\det(A) = 0$.
- D3: Eine Determinante ist **normiert**, d.h. $\det(Id) = 1$.

Daraus folgt für $\det : Mat(n,n) \to \mathbb{R}$ eine Determinantenabbildung und $\lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in Mat(n,n)$:

- D4: Ist eine Zeile von A gleich 0, so ist $\det(A) = 0$.
- D5: Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist $\det(B) = -\det(A)$.
- D6: Entsteht B aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, so ist $\det(B) = \det(A)$.

Sind die Zeilen von $A \in Mat(n,n)$ linear abhängig, so ist $\det(A) = 0$.

$\det(E_{ij}) = -1$
$\det(E_{ij}^{\lambda}) = 1$
$\det(E_{i}^{\lambda}) = \lambda$

A ist ausgeartet $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Die Determinantenabbildung ist **eindeutig**! $A, B \in Mat(n,n)$; dann ist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

- D7: Laplace-Spaltenentwicklung: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str})$ (für $A \in Mat(n,n)$)

wobei $A \in Mat(n,n)$, $A_{ij}^{Str} \in Mat(n-1, n-1)$ die Matrix A ohne die i-te Zeile und j-te Spalte ist und $j \in \{1, ..., n\}$ vorher gewählt wird.
Regel von Sarrus: $\det(3 \times 3 - \text{Matrix})$ ist die Summe der Produkte der Diagonalenelemente minus die Summe der Produkte der Antidiagonalenelemente;
$\det(2 \times 2 - \text{Matrix})$ ist die Summe der Hauptdiagonalenelemente minus die Summe der Antidiagonalelemente.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in Mat(m,n)$;

die Matrix $A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in Mat(n,m)$ heißt **transponierte Matrix** von A.

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix, dann gilt: $\det(A) = \det(A^t)$. $(A^t)^t = A$
Daraus folgt: D1 - D7 gelten auch für die Spalten einer quadratischen Matrix!

Insbesondere (Laplace-Zeilenentwicklungssatz): $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A_{ji}^{Str})$ (für $A \in Mat(n,n)$).

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann gilt: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

[Gleiches gilt für untere Dreiecksmatrizen, da man durch Transponieren wieder eine obere Dreiecksmatrix erhält und die Determinanten gleich sind.]

Sei $(a_1, ..., a_n)$ ein n-Tupel von Vektoren $(a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n)$, dann gilt:

$(a_1, ..., a_n)$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \det(a_1\ a_2\ ...\ a_n) \neq 0$.

Cramersche Regel: $A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet, $b, x \in \mathbb{R}^n$; dann gilt für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ folgendes:

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}{\det(A)}.$$

Sei $A \in Mat(n,n)$; die Matrix, deren (i,j)-ter Eintrag gleich $(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{Str})$ ist, heißt **adjunkte** Matrix (oder **Komatrix**) von A und wird mit $Co(A)$ bezeichnet.
Um die adjunkte Matrix zu erhalten, ersetzt man zuerst den (i,j)-ten Eintrag mit $(-1)^{i+j} \det(A_{ij}^{Str})$ und transponiert danach noch.

$\Rightarrow$ Leibnitz-Laplace-Cramer-Formel für die inverse Matrix: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Co(A)$

Sei $f: V \to U$ ($V \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^m$) eine lineare Abbildung und B_V, B_U Basis-Tupel in V, U. Dann ist $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Ihre Matrix heißt **darstellende Matrix der Abbildung f bezüglich der Basen B_V, B_U**.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}"] \arrow[d, "(C_{B_V})^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \\ V \arrow[r, "f"'] & U \arrow[u, "C_{B_U}"'] \end{tikzcd}$$

Seien $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ und $B_U = \{u_1, ..., u_m\}$ Basistupel in V, U; dann ist $(C_{B_V})^{-1}(e_i) = v_i$ und somit $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}(e_i) = C_{B_U}(f(v_i))$ der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis B_U.
Also: Die i-te Spalte der darstellenden Matrix ist der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis B_U (und hängt somit von der Wahl der Basen ab).

Sei V eine Basis in $\mathbb{R}^n$, B eine Basis in $\mathbb{R}^n$ und $x \in V$ mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; dann gilt: Die Koordinaten von b_i in V sind: $(b_i)_{1 \le i \le n} = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich für $x \in V$ nach B die **Transformations-** oder

Übergangsmatrix: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}$ mit T^{-1} wohldefiniert.

Und umgekehrt sind die Koordinaten von x in B: $\quad T^{-1}x$.

Sei $f: V \to U$ eine lineare Abbildung, $\dim(V) = n$, $\dim(U) = m$; dann gilt: Es gibt eine Basis B_V in V und B_U in U, sodass die Matrix der Abbildung die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & 0_{k,p} \\ 0_{r,k} & 0_{r,p} \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basen hat.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m,n)$. Der **Rang** (Bezeichnugn: rk) ist die Dimension von

$$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right) \text{ in } \mathbb{R}^m.$$

$rk(A) = \dim(\text{Bild}_{f_A})$.

Seien $B \in Mat(m,m)$, $C \in Mat(n,n)$ nichtausgeartet und $A \in Mat(m,n)$, dann gilt: $rk(BA) = rk(A) = rk(AC)$ $\forall A$. $\Rightarrow$ Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.
Daher kann man zur Berechnung des Rangs jede Matrix auf die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & 0_{k,p} \\ 0_{r,k} & 0_{r,p} \end{pmatrix}$ bringen; k ist der Rang dieser Matrix.
$rk(A) = rk(A^t)$ und die Anzahl linear unabhängiger Spalten einer Matrix ist gleich der Anzahl linear unabhängiger Zeilen der Matrix.

Untermatrix: Sei $A \in Mat(m,n)$, $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$, $m' \le m$, $n' \le n$; dann ist die zu $i_1, ..., i_{m'}$, $j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A die $(m' \times n')$-Matrix, deren (p,q)-Eintrag gleich a_{i_p, j_q} ist.

Der Rang einer Matrix ist gleich der höchsten Dimension einer quadratischen, nichtausgearteten Untermatrix.

Für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in Mat(m,n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ gilt:

a) Lösbarkeitskriterium: $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \Longleftrightarrow rk(A) = rk((A,b))$, (wobei (A,b) die um b erweiterte Matrix von A ist).

b) Menge der Lösung: $\mathbb{L} = \{ \quad x + v \quad , x \text{ eine Lösung}, v \in Kern_{f_A} \}$.

$(rk(A) = rk((A,b)) \Leftrightarrow b$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.)

Zwei Matrizen A, $A' \in Mat(n,n)$ heißen ähnlich, falls es ein nichtausgeartetes $B \in Mat(n,n)$ gibt, so dass $A' = B^{-1}AB$.

Ein Polynom mit Koeffizienten $a_m, ..., a_0$ ist die Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a_m x^m + ... + a_0$. Der Grad ist der höchste Exponent, für den a_n des Monoms $a_n x^n$ nicht Null ist. Dieser Koeffizient heißt Leitkoeffizient.

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Das **charakteristische Polynom** der Matrix A ist das Polynom $\chi_A = \det(A - t \cdot Id)$; mit $\chi_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$, $a_n \neq 0$ und $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = \det(A)$.
Sind A und A' ähnlich, so sind deren charakteristischen Polynome gleich ($N_A = N_{A'}$). (Die Umkehrung gilt nicht!)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt **Spur** (trace) von A.
$\Rightarrow$ Ähnliche Matrizen haben gleiche Spuren und Determinanten.

Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert**, falls es ein $v \in V$, $v \neq 0$ gibt, so dass $f(v) = \lambda \cdot v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $Eig_\lambda = \{v \in V,\ f(v) = \lambda v\}$ der **Eigenraum** zum Eigenwert λ. Ein **Eigenvektor** ist ein Element von Eig_λ, welches $\neq \vec{0}$ ist .

($\Leftrightarrow f := f_A$, dann: $Eig_\lambda = Kern_{A - \lambda\, Id}$)

Es gilt: λ ist Eigenwert von $f \Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Zum Finden der Eigenwerte, Eigenvektoren und der Eigenräume:

1. Charakteristisches Polynom konstruieren und Nullstellen bestimmen,
2. für jeden Eigenwert λ_i den $Kern_{A - \lambda_i\, Id} = Eig_{\lambda_i}$ finden $\left[(A - \lambda_i\, Id)x = \vec{0} \text{ lösen}\right]$.

Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$; dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.
Ist $n = \dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.

Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen V heißt genau dann **diagonalisierbar**, falls seine Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat.
Eine quadratische Matrix A heißt diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist ($\Longleftrightarrow A$ zu einer diagonalisierbaren Matrix ähnlich ist).

f ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist. (Es gilt: 1. die darstellende Matrix in dieser Basis ist diagonal und 2. auf dem (i,i)-Platz der Matrix steht der Eigenwert des i-ten Basisvektors.)
Das heißt: Ist $\dim(V) = n$ und hat der Endomorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Eine **Gruppe** besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (Multiplikation) mit folgenden Eigenschaften:

- G1: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (\forall a, b, c \in G)$. Assoziativität
- G2: Es gibt ein $e \in G$ mit $e \cdot a = a \quad (\forall a \in G)$. neutrales Element
- G3: Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$, s.d. $b \cdot a = e$. inverses Element

Gilt außerdem $a \cdot b = b \cdot a$, so heißt die Gruppe eine **abel'sche** (oder **kommutative)** Gruppe.

(Jeder Vektorraum $(V, +)$ ist eine abel'sche Gruppe)

Sei G eine Gruppe, dann gilt:
- Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$, s.d. $e \cdot a = a : \forall a \in G$; außerdem gilt $a = a \cdot e$.
- Zu jedem a existiert nur ein $b \in G$, s.d. $b \cdot a = e$; für dieses gilt auch $a \cdot b = e$.
- $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a, \qquad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \qquad , \forall a, b \in G.$

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elementen. Die Gruppe $s_n = (\{f : M \to M, \text{ f bijektiv}\}, \circ)$ nennt man Gruppe von **Permutationen** von M.

O.B.d.A. ist $M = \{1, 2, ..., n\}$; dann kann man $f \in s_n$ als $2 \times n$-Tabelle schreiben: $f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}$.

Komposition von Permutationen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Inverse einer Permutation: Zeilen tauschen, Spalten sortieren. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Gleichungen der Form $x \cdot g = f$, ($f, g \in G$ gegeben, x gesucht) haben als Lösung $x = f \cdot g^{-1}$.

(Keine Kommutativität $\Rightarrow$ i.d.R. $x \neq g^{-1} \cdot f$.)

$|G|$ oder $\#G$ ist die Anzahl der Elemente in G. $|s_n| = n!$

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine **Untergruppe** von $(G, \cdot)$ ist eine nichtleere Teilmenge $G' \subseteq G$ mit den Eigenschaften:

- $\forall a, b \in G'$ ist $a \cdot b \in G'$ (abgeschlossen bezüglich Multiplikation)
- $\forall a \in G' : \exists a^{-1} \in G'$ (abgeschlossen bezüglich Invertieren)

Eine Untergruppe ist eine Gruppe bezüglich der induzierten Multiplikation.

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $(H, *)$ eine nichtleere Menge mit einer Multiplikation $* : H \times H \to H$. Eine Bijektion $\Phi : G \to H$ heißt ein Isomorphismus, falls für alle $a, b \in G$ gilt: $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) * \Phi(b)$.
Dann ist H außerdem eine Gruppe.

Eine **Relation** auf einer Menge A ist eine Teilmenge R von $A \times A$. (z.B.: $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | a \leq b\}$) Steht a in Relation zu b, so schreibt man: $a \sim b$.

Eine Relation heißt **Äquivalenzrelation** wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- Reflexivität: $\forall a \in A : a \sim a$;
- Symmetrie: $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist auch $b \sim a$;
- Transitivität: $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und $b \sim c$, so ist $a \sim c$.

$\boxed{GL_n = \{A \in Mat(n, n) | \det(A) \neq 0\}}$

Eine **Zerlegung** einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von M mit den Eigenschaften:
(i) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i = M$,
(ii) $M_i \bigcap M_k = \emptyset$, falls $M_i \neq M_k$. (Jedes Element von M ist in genau einer Teilmenge enthalten.)

Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \emptyset$; dann gilt: $\forall x \in M : [x] = \{y \in M | x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} = \{[x] | x \in M\}$. $[x]$ heißt "Äquivalenzklasse von x" und $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M.

Es sei $M = \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}(, q \neq 0)$; die Relation $a \overset{\text{mod } q}{\equiv} b \Longleftrightarrow q \cdot k = a - b \quad , k \in \mathbb{Z}$. Sie ist eine Äquivalenzrelation.

Definiert man die Addition $\overset{\text{mod } q}{+}$ auf $\mathbb{Z}_q$ wie folgt: $[a] \overset{\text{mod } q}{+} [b] = [a + b]$; so ist $(\mathbb{Z}_q, \overset{\text{mod } q}{+})$ eine abel'sche Gruppe.

Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Abbildungen $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (Addition & Multiplikation) ist ein **kommutativer Ring**, falls:

- R1: $(\mathbb{K}, +)$ ist ein abel'sche Gruppe; deren neutrales Element wird mit 0 bezeichnet.
- R2: Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.
- R3: Es gilt das Distributivgesetz $(\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$.

$(\mathbb{K}, \cdot, +)$ sei ein kommutativer Ring. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{K} : k \cdot 0 = 0$.

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. **Größter gemeinsamer Teiler** von a, b ($ggT(a, b)$) ist die größte Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass m a und b teilt.
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$; dann gilt: $\exists n, m \in \mathbb{Z}$, s.d. $n \cdot a + m \cdot b = ggT(a, b)$.
Desweiteren gilt: $ggT(a, b) = ggT(a - b, b)$.

Ein kommutativer Ring heißt ein **Körper**, falls $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$ eine (automatisch abel'sche) Gruppe ist; wobei 0 das neutrale Element in $(\mathbb{K}, +)$ ist. $((\mathbb{Q}, \cdot, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot, +)$, $(\mathbb{C}, \cdot, +)$ sind Körper.)

$(\mathbb{Z}_q, \overset{\text{mod } q}{\cdot}, \overset{\text{mod } q}{+})$ ist genau dann ein Körper, wenn q eine Primzahl ist.

Ein **Unterkörper** eines Körpers $\mathbb{K}$ ist eine nichtleere Teilmenge $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$, die abgeschlossen bezüglich Addition, Multiplikation und Invertieren in $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist.
Ein Unterkörper ist ein Körper (bezüglich der induzierten Operationen).

Seien $(\mathbb{K}_1, \cdot_1, +_1)$, $(\mathbb{K}_2, \cdot_2, +_2)$ Körper. Eine Bijektion $\Phi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ heißt Isomorphismus, falls $\forall a, b \in \mathbb{K}_1$ gilt:
$\Phi(a \cdot_1 b) = \Phi(a) \cdot_2 \Phi(b)$ und $\Phi(a +_1 b) = \Phi(a) +_2 \Phi(b)$ ("Φ erhält die Operationen").

Ein Körperisomorphismus ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Körper.

Ein Körper $(\mathbb{H}, \cdot, +)$ heißt eine **Körpererweiterung** des Körpers $(\mathbb{K}, \cdot, +)$, falls $\mathbb{H}$ einen Unterkörper hat, der zu $\mathbb{K}$ isomorph ist.

(Jeder Körper ist eine Körpererweiterung von $\mathbb{Z}_q$ oder von $\mathbb{Q}$.)

Sei $(\mathbb{K}, \cdot, +)$ ein Körper. Eine Menge V mit Abbildungen $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ heißt <u>Vektorraum über $\mathbb{K}$</u>, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

I)	$(u+v)+w = u+(v+w)$	IV)	$\forall v \in V : \exists -v \in V : -v+v = 0$	VII)	$\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
II)	$u+v = v+u$	V)	$(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$	VIII)	$1 \cdot v = v$
III)	$\exists 0 \in V : 0+v = v$	VI)	$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$		

(Alle bisherigen Aussagen über Vektorräume sind auf Vektorräume über Körpern übertragbar, da keine $\mathbb{R}$-spezifischen Eigenschaften verwendet wurden.)

Zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.
Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Grad}(P) \geq 1$ hat mindestens eine <u>Nullstelle</u>.
Jede Matrix über $\mathbb{C}$ hat mindestens einen <u>Eigenwert</u> und einen Eigenvektor.
Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ (Polynom mit komplexen Koeffizienten), $P \neq 0$, kann man in lineare Faktoren zerlegen. Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf das Umstellen von Faktoren.
$\Rightarrow$ Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$, $\mathrm{Grad}(P) > 0$, kann man in Produkte von linearen und quadratischen Fatkoren zerlegen:

$$P = g_1 g_2 ... g_m,\ \mathrm{Grad}(g_i)_{\forall i \in \{1,...,m\}} \in \{1,2\}.$$

"Beste" Form einer reellen $n \times n$-Matrix, so dass das charakteristische Polynom n (möglicherweise komplexe) Nullstellen hat: Sei $A \in Mat(n,n,\mathbb{R})$ $(\subseteq Mat(n,n,\mathbb{C}))$ eine Matrix, die über $\mathbb{C}$ n verschiedene Eigenwerte hat. Dann gibt es eine Matrix $B \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass die Matrix $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$ Block-diagonal-Form hat; wobei jedes A_j eine 1×1-Matrix (λ_j) oder eine 2×2-Matrix der Form $\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, $(\beta \neq 0)$ ist und alle λ_k und $\mu_l = \alpha_l + i\,\beta_l$ paarweise verschieden sind.

Seien $(V, \cdot, +)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V und λ', $\lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften:

$$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)\ ,$$
$$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')\ .$$

$(\sigma(u,0) = \sigma(0,v) = 0)$

Symmetrie: $\forall u, v \in V : \sigma(u,v) = \sigma(v,u)$.

Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V, $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$. Dann identifiziert man $Mat(n,1,\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}^n$, $Mat(1,1,\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}$, setzt u, v mit den Koordinaten $C_B(u) = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ und $C_B(v) = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ und definiert $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ wie folgt:

$$\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A\, C_B(v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1,1,\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}\ .$$

Die Bilinearform σ_A ist <u>symmetrisch</u> $\Longleftrightarrow A^t = A$ (A ist symmetrisch).

Sei $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt: Für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau ein $A \in Mat(n,n)$, so dass $\sigma = \sigma_A$.
Ferner gilt: Das Element (i,j) der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$; diese Matrix A heißt **Gramsche Matrix** oder auch "Matrix der Bilinearform".

Sei A die Gramsche Matrix der Bilinearform σ_A bezüglich der Basis B. Dann ist $A' = T^t AT$ die Gramsche Matrix von $\sigma_{A'}$ bezüglich der Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.
Ist A symmetrisch, so ist auch $A' = T^t AT$ symmetrisch.

Eine Bilinearform heißt **postitiv definit**, falls $\sigma(u,u) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}, u \neq \vec{0}$. Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein **Skalarprodukt** (oder inneres Produkt).

Eine Basis B heißt **orthogonal** bezüglich einer Bilinearform σ, falls für alle $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ gilt: $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
Falls zusätzlich für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ $\sigma(b_i, b_i) = 1$ gilt, heißt die Basis **orthonormal**.

Sei σ eine Bilinearform; dann gilt:

1. Ist $(b_1, ..., b_n)$ eine orthogonale Basis, so ist die Gramsche Matrix von σ_A diagonal ($\Rightarrow$ symmetrisch).
2. Ist $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis, so ist die Gramsche Matrix von σ_A gleich $Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ (symmetrisch und positiv definit).

σ sei eine Bilinearform auf einem Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.

Gram-Schmidtsches-Orthogonalisierungsverfahren:
Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis. $b_1 = a_1$ und für $k \geq 2 : b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i \right)$ konstruiert dann schrittweise eine orthogonale Basis.
Diese Basis lässt sich normieren, indem man jeden Basisvektor b_i mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i, b_i)}}$ multipliziert.
Das heißt: Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorrarum ist das Standardskalarprodukt in einer geeigneten Basis.

Ein **Euklidscher Vektorraum** ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\langle\ ,\ \rangle = \sigma(\ ,\ )$ ein Skalarprodukt ist.
Ist U ein Untervektorraum eines Euklidschen Vektorraums, so ist $\left(U, \langle\ ,\ \rangle_{|U}\right)$ ein Euklidscher Vektorraum, wobei $\langle u_1, u_2 \rangle_{|U} = \langle u_1, u_2 \rangle$ ist.

Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und $B = (b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: Die Koordinaten eines beliebigen $v \in V$ sind $\begin{pmatrix} \langle b_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v \rangle \end{pmatrix}$. $(\forall b_i \in \text{Basis} : \langle b_i, u \rangle = 0 \Longrightarrow u = \vec{0})$

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidscher Vektorraum. Die Vektoren $u, v \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v \rangle = 0$.
Ein Vektor v heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge $M \subseteq V$, falls v zu allen Vektoren aus M orthogonal ist.

Sei U ein Untervektorraum von V. Für $v \in V$ heißt der Vektor $u \in U$, so dass $(v - u)$ (das **Lot**) orthogonal zu U ist, die **orthogonale Projektion** des Vektors v auf U und wird mit $\text{Proj}_U(v)$ bezeichnet.

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: Für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u von v auf U.

Ferner gilt: Für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $\langle v-u', v-u'\rangle > \langle v-u, v-u\rangle$.

(Die Projektion des Vektors v auf den Unterraum U existiert, ist eindeutig und minimiert $|v-u|$ für $u \in U$.).

$\mathrm{Proj}_U(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$, wobei $B = (b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Damit lässt sich das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren geometrisch wie folgt beschreiben: Für $k \geq 2$ gilt: $b_k = a_k - \mathrm{Proj}_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k) = a_k - \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$, da $\left\{\frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1\rangle}}, ..., \frac{b_{k-1}}{\sqrt{\langle b_{k-1}, b_{k-1}\rangle}}\right\}$ eine orthonormale Basis in $span\left(\{a_1, ..., a_{k-1}\}\right)$ ist.

Kartesische (descartsche) Koordinatensysteme in der Ebene (bzw. dem Raum) besteht aus zwei (bzw. 3) paarweise orthogonalen orientierten Geraden, die alle einen gemeinsamen Punkt haben.
Die Koordinaten eines Punkts P sind die vorzeichenbehafteten Abstände des Ursprungs zu den Fußpunkten der Lote des Punktes auf den Geraden. Das Vorzeichen ist "+", falls das Lot auf der positiven, und "-", falls das Lot auf der negativen Hälfte der Geraden liegt.
Dabei gilt: Die Koordinaten eines Punktes in einer beliebigen orthonormalen Basis mit beliebigem Ursprung A haben kartesische Koordinaten, legt man den Ursprung des Systems in A und macht x- und y-Achse jeweils zu den von u bzw. v aufgespannten Vektorräumen.

Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ $(\in \mathbb{R})$ **Länge** von v und wird mit $|v|$ bezeichnet.
Für je zwei Vektoren $u \neq 0$, $v \neq 0$ heißt die Zahl $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\cdot|v|}\right) \in [0, \pi]$ der **Winkel** zwischen u und v.

$(\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u, v))$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle u, v\rangle| \leq |u| \cdot |v|$ $(\forall u, v \in (V, \langle\,,\,\rangle))$.

Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u| \cdot |v| \Longleftrightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig.

Eine Matrix heißt **orthogonale Matrix**, falls $O^t = O^{-1}$ gilt. Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, so dass $O^{-1}AO$ diagonal ist.
Jede symmetrische $(n \times n)$-Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ hat mindestens einen reellen Eigenwert.

Im $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$, dann gilt: A ist orthogonal $\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^n$: $\langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle$. ("$A$ erhält das Skalarprodukt".)
$A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standardskalarprodukt der i-ten Spalte mit der j-ten Spalte $\begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$ ist.
$A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ ist genau dann orthogonal, wenn die Vektoren Ae_1, ..., Ae_n eine orthonormale Basis bezüglich des Standardskalarprodukts bilden.

Ist A symmetrisch, so gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n, n)$ mit $\det(B) \neq 0$, so dass B^tAB die Form

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} := (*)$$

hat, wobei auf der Diagonalen r-mal "+1" und s-mal "-1" steht.

Dies ist die "einfachste" Form, auf die man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe einer Transformation $A \mapsto T^t AT$ bringen kann.

Trägheitssatz von Sylvester:
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V, so dass in dieser Basis die Matrix von σ wie $(*)$ ist. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig über die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

- $r = \max\left(\{\dim(W), \text{ so dass } W \in V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) > 0 \text{ für alle } w \in W, w \neq \vec{0} \text{ ist.}\}\right)$,
- $s = \max\left(\{\dim(W), \text{ so dass } W \in V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) < 0 \text{ für alle } w \in W, w \neq \vec{0} \text{ ist.}\}\right)$.

Das Tripel $(r, s, n - r - s)$ heißt **Signatur** der Bilinearform σ (und ist eindeutig bestimmt).

Sei A eine $n \times n$-Matrix; dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1, und eine diagonale Matrix Λ, so dass $A = O_1 \Lambda O$.
(Geometrische Bedeutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderausführung einer Drehung (und Spiegelung), einer Streckung und wieder einer Drehung (und Spiegelung).)

Sei A eine $n \times n$-Matrix; dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S, so dass $A = O \cdot S$.