Gauss: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen (1,2,3,4,...)
$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen (...,-2,-1,0,1,2,...)
$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen ($\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}$)
$\mathbb{R}$ reelle Zahlen ($\sqrt[n]{x}, \pi, e, ...$)
$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen ($z = x + iy$)

$0! = 1$, $1! = 1$, Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, ..., n\} : \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Binomischer Satz: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0, n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$\Rightarrow (1+x)^n > 1 + nx;$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : (1+x)^n > \binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2$

$M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ heißt beschränkt nach oben / unten g.d.w.: $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in M : x \leq c \,/\, x \geq c$.
c heißt obere / untere Schranke. Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum** ($sup(M)$), die größte untere Schranke **Infimum** ($\inf(M)$).

Axiom von Archimedes: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : na > b$

rationale Zahlen dicht in reellen Zahlen: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists r \in \mathbb{Q} : x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$

Intervalle: Offen: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
Abgeschlossen: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
Intervallschachtelung: $c \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$

Potenzen: $\forall a, b \geq 0 : \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$, $\forall \alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, a > 0 : a^{\alpha} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Betrag: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ Abstand: $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) := |x - y|$

ε-Umgebung von x_0: $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} : U_{\varepsilon}(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0 \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \varepsilon\}$

$M \subset \mathbb{R}$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow M = \emptyset \vee \forall x_0 \in M : \exists U_{\varepsilon}(x_0) \subset M$ M heißt **abgeschlossen**:$\Leftrightarrow \mathbb{R} \backslash M$ ist offen

$x_0 \in M$ heißt **innerer Punkt**:$\Leftrightarrow \exists U_{\varepsilon}(x_0) \subset M$ $\overset{0}{M}$ ist die Menge aller inneren Punkte.

$x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von M:$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in (U_{\varepsilon}(x_0) \cap M) \wedge x \neq x_0$

$f : X \to Y$ heißt Funktion/Abbildung; $D(f) = X$ Definitionsbereich und $R(f) = \{f(x) : x \in X\}$ Wertebereich.

- f heißt **injektiv**: $\forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \vee (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
- f heißt **surjektiv**: $f(X) = Y \Leftrightarrow \forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
- f heißt **bijektiv**: f ist injektiv und surjektiv

Hintereinanderausführung: $f : X \to Y$ $g : Y \to Z$ $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ $,x \in X$ $\Rightarrow (g \circ f) : X \to Z$

-D **symmetrisch** zu 0:$\Leftrightarrow x \in D \wedge -x \in D$
f heißt **gerade**: $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$
f heißt **ungerade**: $\forall x \in D : f(x) = -f(-x)$

-$D = I$ Intervall
f streng monoton wachsend: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
f streng monoton fallend: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

abzählbare Mengen: X beliebige Menge:
X heißt **endlich** $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \exists$ bijektive Abbildung : $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to X$ oder $X = \emptyset$
X heißt **abzählbar unendlich**: $\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to X$
X heißt abzählbar: X endlich oder X abzählbar unendlich
X heißt **überabzählbar** unendlich:$\Leftrightarrow X$ nicht abzählbar

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ heißt Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten a_k $(a_n \neq 0)$.

$p(x_0) = 0$, x_0 heißt Nullstelle;
ein Polynom p vom Grad n lässt sich auch wie folgt darstellen: $p(x) = (x - x_1)^{m_1} ... (x - x_l)^{m_l} q(x)$, wobei x_i eine Nullstelle der Vielfachheit m_i ist, q ein Polynom vom Grad $n - (m_1 + ... + m_l)$ ist und keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt.
p hat höchstens n Nullstellen. Die **rationalen Nullstellen** eines Polynoms $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0, ..., n)$ findet man unter den Brüchen $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, in denen a ein Teiler von a_0 und b ein Teiler von a_n ist.

Zu $n + 1$ beliebigen Stützstellen (x_i, y_i) , $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, gibt es genau ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit: $P(x_i) = y_i$ $(i = 0, ..., n)$.
Ansatz: $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ mit $(x_0|y_0), (x_1|y_1), ..., (x_n|y_n)$

für große $|x|$ gilt: $p(x) \approx a_n x^n$

Faktorisierungssatz für reelle Polynome:
Jedes reelle Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $\quad (a_n \neq 0, n \geq 1, a_j \in \mathbb{R})$ lässt sich darstellen als:

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} ... (x - x_r)^{m_r} [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{l_1} ... [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{l_s}$$

wobei $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\quad m_1 + ... + m_r + 2(l_1 + ... + l_s) = n$, $\quad a_n \in \mathbb{R}$, $\quad x_k \in \mathbb{R}$, $\quad m_k, l_j \in \mathbb{N}$ für $k = 1, ..., r$, $j = 1, ..., s$.

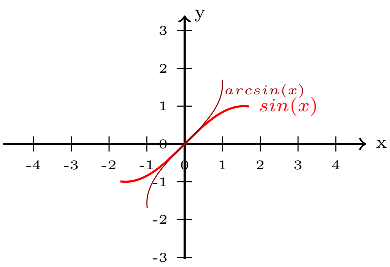
Partialbruchzerlegung: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $Grad(P(x)) < Grad(Q(x))$:

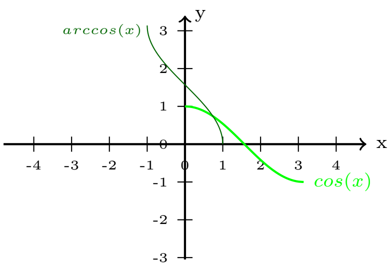
$$R(x) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk}}{(x - x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{l_j} \frac{a_{jk}\, x + b_{jk}}{\left[(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]^k} \right) \qquad , A_{jk}, a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$$

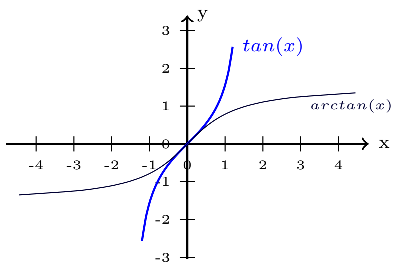
mit dem Linearfaktor: $\quad (x - x_j)^{m_j} \Rightarrow \frac{A_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{A_{j2}}{(x - x_j)^2} + ... + \frac{A_{jm_j}}{(x - x_j)^{m_j}}$

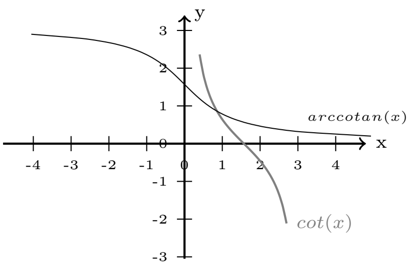
quadratischen Faktor: $\quad \left[(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]^{l_j} \Rightarrow \frac{a_{j1}\, x + b_{j1}}{\left[(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]} + ... + \frac{a_{jl_j}\, x + b_{jl_j}}{\left[(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]^{l_j}}$

Drehung eines Koordinatensystems um den Winkel ψ: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$









	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
cotan(x)	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Normaldarstellung: $z = x + i\,y$

Komplexe Zahlen:

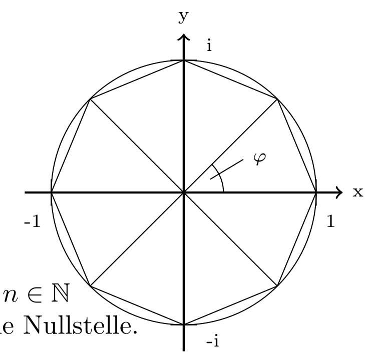
$z = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt komplexe Zahl ($\in \mathbb{C}$); $\overline{z} = (x, -y)$ konjugiert komplexe Zahl.
Addition: $z + w = (x + u,\ y + v)$ mit $z = (x, y),\ w = (u, v),\ w, z \in \mathbb{C}$.
Multiplikation: $z \cdot w = (xu - yv,\ xv + yu)$.
$(1, 0)$ neutrales Element der Multiplikation; $(0, 0)$ neutrales Element der Addition;
$(-z)$ inverses Element der Addition zu z;
$\frac{1}{x^2+y^2}(x, -y)$ inverses Element der Multiplikation zu (x, y).
$z + \overline{z} = 2\,Re(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$.
Betrag von $z \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$, Abstand von $z, w \in \mathbb{C}$: $d(z, w) = |z - w|$.

Trigonometrische Darstellung: $z = |z|(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$; φ heißt **Argument**;

- für $z, w \in \mathbb{C}$: $z = w \Leftrightarrow |z| = |w| \wedge \varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\varphi + \psi) + i\,\sin(\varphi + \psi))$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi))$
- $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\,\sin(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right)$, ($k = 0, 1, ..., n-1$, n verschiedene Zahlen)

Einheitswurzeln:

1. Es gilt $w^n = 1$ g.d.w. $w = \cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\,\sin(k\frac{2\pi}{n})$, $k = 0, 1, ..., n-1$
2. Die n-ten Einheitswurzeln bilden ein regelmäßiges n-Eck auf dem Einheitskreis.



komplexes Polynom: $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$, $(n \in \mathbb{N}, z, c_j \in \mathbb{C})$

Fundamentalsatz der Algebra: für $n \in \mathbb{N}$

Jedes komplexe Polynom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ (mindestens) eine Nullstelle.

Ist z_0 Nullstelle des Polynoms, so ist es auch $\overline{z_0}$.

p sei ein Polynom mit reellen Koeffizienten, $x_1, ..., x_r$ reellen Nullstellen mit Vielfachheiten $m_1, ..., m_r$ und $z_1, ..., z_s, \overline{z_1}, ..., \overline{z_s}$ komplexen Nullstellen mit Vielfachheiten $l_1, ..., l_s$ $(z_j = \alpha_j + i\,\beta_j,\ \overline{z_j} = \alpha_j - i\,\beta_j,\ \beta_j \neq 0$ mit $j = 1, ..., s)$:

$$p(x) = (x - x_1)^{m_1}...(x - x_r)^{m_r}[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{l_1}...[(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{l_s}$$

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : |a_k - a| < \varepsilon$.
a heißt dann **Grenzwert** von a_k; Schreibweise: $a_k \to a$ / $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k) = a$
Andernfalls heißt a_k **divergent**.
$\lim\limits_{k\to\infty}(a_k) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 : \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_k > c : \forall k > k_0$ $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k) = -\infty \Leftrightarrow \forall c > 0 : \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_k < -c : \forall k > k_0$
Jeder Grenzwert ist <u>eindeutig</u> bestimmt. $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(a_k - a) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}|a_k - a| = 0$

Existieren Grenzwerte $a = \lim(a_k)$, $b = \lim(b_k)$ und für $k \geq k_0$ gilt $a_k \leq b_k$, so gilt:
$a \leq b$

<u>Sandwich-Lemma</u>:
Es seien $a_k \leq c_k \leq b_k$ für $k \geq k_0$ und es sei $\lim(a_k) = \lim(b_k) = c$; dann ist:
$\lim(c_k) = c$.

$\lim(a_k) = a\ \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim|a_k| = |a|$

für $0 \leq a_k$ gilt: $\lim(a_k) = a\ \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\sqrt{a_k} = \sqrt{a}$

$a_k < b_k \not\Rightarrow \lim a_k < \lim b_k$

$$\boxed{\begin{array}{l} |q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0 \\ a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1 \\ a > 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^n}{a^k} = 0 \\ a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a^k}{k!} = 0 \\ k > 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty \end{array}}$$

- $\exists c > 0 : |a_k|_{\forall k \in \mathbb{N}} < c$, so heißt a_k beschränkt.
- ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\lim a_k = 0$, $\Rightarrow \lim(a_k \cdot b_k) = 0$.
- $\exists \lim(b_k) = b \wedge \exists \lim(a_k \pm b_k) \Rightarrow \lim(a_k \pm b_k) = \lim(a_k) \pm \lim(b_k) = a \pm b$.
- $\exists \lim(b_k) = b \wedge \exists \lim(a_k \cdot b_k) \Rightarrow \lim(a_k \cdot b_k) = \lim(a_k) \cdot \lim(b_k) = a \cdot b$.
- $\exists \lim(b_k) = b \neq 0 \wedge \exists \lim\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \Rightarrow \lim\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\lim(a_k)}{\lim(b_k)} = \frac{a}{b}$

Satz von der monotonen Konvergenz:
$(a_k)_k$ ist monoton wachsend (fallend) und beschränkt, dann: $\lim(a_k) = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ $(= \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\})$.

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß).

$a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungswert** der Folge $(a_k)_k \Leftrightarrow$ eine Teilfolge $(a_{k_l})_l$ existiert mit: $\lim(a_{k_l}) = a$. Ist $H(a_k)$ die Menge aller Häufungspunkte, so ist:

$\limsup(a_k) = \overline{\lim}(a_k) = \sup(H(a_k))$ (limes superior, oberer Limes),
$\liminf(a_k) = \underline{\lim}(a_k) = \inf(H(a_k))$ (limes inferior, unterer Limes).

Cauchy-Folge: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists k(\varepsilon) : \forall k, l > k(\varepsilon) : |a_k - a_l| < \varepsilon$
Ist $(a_k)_k$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_k)_k$ ist eine Cauchy-Folge (Fundamentalfolge).
Ist $(a_k)_k$ eine Cauchy-Folge $\Rightarrow$ $(a_k)_k$ ist beschränkt.
Cauchy'sches Konvergenzkriterium:
$(a_k)_k$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$, dann gilt: $(a_k)_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_k)_k$ ist eine Cauchy-Folge

Konvergenz komplexer <u>Folgen</u>: (z.B.: geometrische Reihe: $\lim_{n\to\infty}(1 + z + z^2 + ... + z^n) = \frac{1}{1-z}$ falls $|z| < 1$)

- $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $c_k \in \mathbb{C} : \forall k$
- $(c_k)_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \exists k(\varepsilon) : |c_k - c| < \varepsilon$ für $k > k(\varepsilon)$ $\quad (c = \lim_{k\to\infty}(c_k))$
- (Rückführung auf reelle Nullfolgen:) $c = \lim_{k\to\infty}(c_k) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}|c_k - c| = 0$
- $c_k = a_k + i\, b_k$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$:
  $(c_k)_k$ ist <u>konvergent</u> $\Leftrightarrow$ $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ sind konvergent und $\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} a_k + i \lim_{k\to\infty} b_k$
- Daher gelten die gleichen Rechenregeln wie bei reellen Folgen! (z.B. auch das Cauchy'sche Konvergenzkriterium.)

Konvergenz von <u>Reihen</u>:

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{C}$, dann heißt $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ **n-te Partialsumme** der Reihe a_k.

a_k heißt **konvergent**: $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \;\in \mathbb{C}$ $\quad (\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s)$; sonst heißt a_k **divergent**.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent** $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist <u>konvergent</u>.

(Schreibweisen: $\forall a_k \in \mathbb{R} : a_k \geq 0 : k \in \mathbb{N}_0$: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent; $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent.)

$$e = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{\text{monoton steigend}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}_{\text{monoton fallend}}$$ ist irrational.

(Stirling-Formel: $\forall n > 0 : \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\Pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\Pi n}\, e^{\frac{1}{12n}}$)

geometrische Reihe: $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$. (Für $|z| \geq 1$ ist sie divergent.) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (streng monoton wachsend).

unendliche Dezimalbrüche: $s = 0, x_1\, x_2\, x_3 \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k \cdot 10^{-k})$ (monoton wachsend, $0 \leq s \leq 1$). $\left[\Rightarrow 0,\overline{9} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 1\right]$

$\forall a_k \in \mathbb{C}$ gilt:

- notwendige Bedingung für Konvergenz: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (Nullfolge)
- Aus absoluter Konvergenz $\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty\right)$ folgt Konvergenz $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty\right)$ und es gilt: $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$
- Sei $a_k = \alpha_k + i\,\beta_k$ mit $\alpha_k,\, \beta_k \in \mathbb{R}$; dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ (absolut) konvergent sind. Außerdem gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.
- $a_k \in \mathbb{R},\ a_k \geq 0,\ k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ die Folge der Partialsummen $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt.

Majorantenkriterium: mit $0 \leq a_k \leq b_k$ für $k \geq k_0$ gilt:

- $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\wedge \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Wurzelkriterium: mit $a_k \geq 0$ für $k \geq k_0$

- $\forall k \geq k_0$ gilt: $\sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.
- $\limsup(\sqrt[k]{a_k}) > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Ist $\limsup(\sqrt[k]{a_k}) = 1$ so folgt daraus <u>keine</u> Aussage über Konvergenz.

Quotientenkriterium: $a_k > 0$ für $k \geq k_0$

- $\forall k \geq k_1$ gilt: $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent
- $\frac{a_{k_{l+1}}}{a_{k_l}} \geq 1$ für $l \geq l_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

- $a_k > 0,\ k \geq k_0$: $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent
- $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent
- $\limsup \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ absolut konvergent ($a_k \in \mathbb{C},\ a_k \neq 0$)

Leibnizkriterium für alternierende Reihen:

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$, $a_k \geq 0$, monoton fallend und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. $\Rightarrow \exists \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = s \quad \in \mathbb{R}$ (Konvergenz) und es gilt $|s_n - s| \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

alternierende harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right]$ ist konvergent ($= \ln(2)$), aber <u>nicht</u> absolut konvergent.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{1}{k^\alpha}\right]$ konvergent für $\alpha > 0$, absolut konvergent für $\alpha > 1$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}\right]$ konvergent, nicht absolut konvergent.

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folge in $\mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine **Bijektion** (Umordnung, Permutation); dann heißt $b_k = a_{\varphi(k)} \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0)$ **Umordnung** von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

<u>großer Umordnungssatz</u>: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent (für $a_k \in \mathbb{R}$) und $s \in \mathbb{R} \vee s = +\infty \vee s = -\infty$

$\Rightarrow \exists$ Umordnung $(b_k)_k$ von $(a_k)_k$ mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = s \quad$ (s beliebig !)

kleiner Umordnungssatz: Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, $a_k \in \mathbb{C}$:

$(b_k)_k$ sei eine Umordnung von $(a_k)_k \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist absolut konvergent und es gilt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Produktreihen:

$(p_l)_l = \sum\limits_{l=0}^{\infty} p_l = \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum\limits_{j,k\in J\times K} (a_j \cdot b_k)$ heißt Produktreihe von $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Es gilt: $\sum\limits_{l=0}^{\infty} p_l \wedge \sum\limits_{l=0}^{\infty} q_l$ Produktreihen von $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \Longrightarrow (q_l)_l$ ist eine <u>Umordnung</u> von $(p_l)_l$.

Es seien $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j = a$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ <u>absolut konvergent</u> (a_j, $b_k \in \mathbb{C}$). Dann konvergiert jede Produktreihe $\sum\limits_{l=0}^{\infty} p_l$ <u>absolut</u> und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} p_l = a \cdot b$.

Cauchy-Produkt: $v_l := \sum\limits_{j+k=l} (a_j b_k) = \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{l}(a_{l-k}b_k), \quad l \in \mathbb{N}_0}_{\text{(Summation bezüglich der Diagonalen)}}$. $\sum\limits_{l=0}^{\infty} v_l$ heißt Cauchy-Produkt von $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Seien $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j = a$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ absolut konvergent, so ist auch das <u>Cauchy-Produkt</u> absolut konvergent

und es gilt $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left[\sum\limits_{k=0}^{l} a_{l-k}b_k\right] = a \cdot b$.

Exponentialfunktion:

$z \in \mathbb{C}$: $\quad \exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt Exponentialfunktion.

$\forall z, w \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 :\quad \exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w), \qquad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)},$

$\exp(z) \neq 0, \qquad \exp(\frac{m}{n}) = [\exp(\frac{1}{n})]^m = \sqrt[n]{\exp(m)}.$

$\forall z \in \mathbb{C}$: $e^z = \exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$ und $e^z \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} x > 0\text{: } e^x > 1 + x \\ x < 0\text{: } e^x < -\frac{1}{x-1} \\ \forall y \in \mathbb{R}\text{: } |e^{iy}| = 1 \end{array}}$$

Grenzwerte von Funktionen:

$D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{C}$ Funktion, dann:

$$\lim_{z \to z_0} (f(z)) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ Folgen } (z_k)_k \text{ in } D \text{ mit } \lim_{k\to\infty}(z_k) = z_0 \text{ gilt: } \lim_{k\to\infty}(f(z_k)) = w_0$$

oder („$\varepsilon - \delta$“- Definition des Grenzwertes):

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) : \forall z \in k_\delta(z_0) \cap D : z \neq z_0 \text{ gilt: } |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b)$ ($\Rightarrow$ rechtsseitig) / $x_0 \in (a,b]$($\Rightarrow$ linksseitig):

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to x_0^+}(f(x)) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a,b) : \ |f(x) - y_0| < \varepsilon$

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to x_0^-}(f(x)) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a,b) : \ |f(x) - y_0| < \varepsilon$

uneigentliche Grenzwerte:

$f : (a,b)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$: $\lim_{x\to x_0}(f(x)) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap (a,b) : x \neq x_0 : \ f(x) > c$

$f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$: $\lim_{x\to\infty}(f(x)) = y_0 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists R > a : \forall x > R : \ |f(x) - y_0| < \varepsilon$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0 : \exists R > a : \forall x > R : \ f(x) > c$

Stetigkeit: $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$

f heißt stetig in $z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) : \forall z \in \underbrace{k_\delta(z_0)}_{|z-z_0|<\delta} \cap D : f(z) \in \underbrace{k_\varepsilon(f(z_0))}_{|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon}$.

f stetig auf $U \quad \Leftrightarrow \quad f$ ist in jedem Punkt $z_0 \in U$ stetig.

f stetig in $z_0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0$ ist isolierter Punkt (kein Häufungspunkt) von D oder $\lim_{z\to z_0}(f(z)) = f(z_0)$.

f stetig in z_0, $(z_k)_k$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0 \implies \lim_{k\to\infty}(f(z_k)) = f\left(\lim_{k\to\infty}(z_k)\right)$.

$f = Re(f(z)) + i\, Im(f(z))$ und f stetig in $z_0 \Leftrightarrow Re(f)$ und $Im(f)$ stetig in z_0.

- $f(x) = x^n$ stetig auf $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$)
- $f(x) = \sqrt{x}$ stetig auf $[0,\infty)$
- $f(z) = e^z$ stetig auf $\mathbb{C}$
- $f(x) = |x|$ stetig auf $\mathbb{R}$

Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D$, so gilt: $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(z) \neq 0$) und $|f|$ stetig in z_0.

Seien $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ und $g : f(D) \to \mathbb{C}$ stetig in $w_0 = f(z_0) \implies g \circ f$ stetig in $z_0 \in D$.

Zwischenwertsatz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$

I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und $-\infty \leq \inf_I(f) < w < \sup_I(f) \leq +\infty$, dann:

1. $\exists \xi \in I$ mit $f(\xi) = w$
2. $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ ist ein Intervall

Folgerung: Jedes Polynom mit einem größten ungeraden Exponenten hat mindestens eine reelle Nullstelle und $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Satz von Maximum und Minimum:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b] = I$, dann gilt:

1. $f(I)$ ist beschränkt und abgeschlossen
2. $\exists u, v \in I$ mit $f(u) = \inf_I(f) \wedge f(v) = \sup_I(f)$

Stetigkeit der Umkehrfunktion:

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend) $\Rightarrow f(I)$ ist ein Intervall.

$f^{-1} : f(I) \to I$ ist stetig auf $f(I)$ und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Der **natürliche Logarithmus** $ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist Umkehrfunktion von $exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Er ist streng monoton wachsend, bijektiv und stetig. Außerdem gilt: $\forall x, y \in (0,\infty)$: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ und $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \forall x \in (0,\infty) : \ln(x^\alpha) = \alpha \cdot \ln(x)$.

allgemeine Potenzfunktion: $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0 : x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$; allgemeine Exponentialfunktion: $a > 0, x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln(a)}$.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist die **Logarithmus**-Funktion: $\log_a(x) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$. Dabei gilt: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ und $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$.

$f : (a, b) \to \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in (a, b) \Leftrightarrow \exists f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \alpha \in \mathbb{C}$ (die erste Ableitung von f in x_0). f heißt differenzierbar auf $(a, b) \Leftrightarrow f$ in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar.
rechtsseitiger Grenzwert: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ $(x_0 \in [a, b))$.
linksseitiger Grenzwert: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ $(x_0 \in (a, b])$.
$\Gamma :=$ Graph (f) $= \{(x, f(x)),\ x \in (a, b)\}$; $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in \mathbb{R}$ heißt Tangente an Γ in $(x_0, f(x_0))$.

$f : (a, b) \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = Re(f(x)) + i\, Im(f(x))$ ist differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$
$\Leftrightarrow Re(f(x))$ und $Im(f(x))$ sind differenzierbar in x_0 und es gilt: $f'(x_0) = (Re(f))'(x_0) + i\, (Im(f))'(x_0)$.
Folgende Aussagen sind dabei äquivalent:

- f ist differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = \alpha \in \mathbb{C}$
- $f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)^2$ und $\lim\limits_{x \to x_0} (\varepsilon(x)) = 0$
- $\frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} 0$

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0}$
$(e^{ix})' = ie^{ix}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

Ist f differenzierbar in $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f$ stetig in x_0 (Umkehrung gilt nicht!).

Differentiationsregeln: $(f, g : (a, b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b))$

1. $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists (\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$
2. Produktregel: $\exists (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$
3. Quotientenregel: $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_9)}{[g(x_0)]^2}$
4. Kettenregel: $f : (a, b) \to (c, d)$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, $g : (c, d) \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0) \Rightarrow \exists (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

trigonometrische Grenzwerte

$(\sin(x))' = \cos(x)$
$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} :$ $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} :$ $(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x} \right) = 0$

Differenzierbarkeit von f^{-1}. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) und streng monoton, dann gilt:

1. $f'(x) \geq 0$ auf (a, b), falls f streng monoton wachsend
2. $f'(x) \leq 0$ auf (a, b), falls f streng monoton fallend
3. $y_0 = f(x_0) \wedge f'(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists \left(f^{-1} \right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0) \right)}$

$\ln'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$
$\log_a{}'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$
$\text{arccot}'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat lokales Maximum (Minimum) in $x_0 \in (a, b)$
$\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b) : f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat isoliertes lokales Maximum (Minimum) in $x_0 \in (a, b)$
$\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b) : f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ und f habe ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
(notwendige Bedingung, nach P. Fermat 1607 - 1665)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und $f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.
(Michel Rollé 1652 - 1719)

Mittelwertsätze der Differentialrechnung:

1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf $(a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.
   (J.L.Lagrange 1736 - 1813)
2. $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b) und $g'(x) \neq 0$ auf (a,b)
   $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
   (A.L.Cauchy 1789 - 1857)

Daher gilt:
$f : (a,b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\forall x \in (a,b) : f'(x) = 0 \Rightarrow \exists c = \alpha + i\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ auf (a,b).
$f'(x) = g'(x) : \forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c : \forall x \in (a,b)$.

Eulersche Formel: $\forall x \in \mathbb{R} : e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. (insbesondere: $e^{i\pi} + 1 = 0$)

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x)^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Regel von l'Hospital: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$:

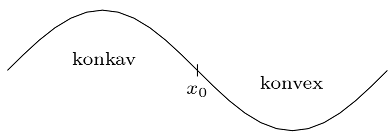
$$\left.\begin{array}{l} f,g : (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar} \\ g'(x) \neq 0 \text{ auf } (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\} \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0}(g(x)) = 0 \text{ oder } = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = y_0 \quad ; -\infty \leq y_0, x_0 \leq +\infty$$

Monotonieverhalten:
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b): (1) $\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
$\forall x \in (a,b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend
(2) $\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ <u>streng</u> monoton wachsend
$\forall x \in (a,b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ <u>streng</u> monoton fallend

(isoliertes) lokales <u>Minimum</u> in x_0: $f'(x_0) \leq 0$ (<0) in $(x_0-\delta, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ (>0) in $(x_0, x_0+\delta)$
(isoliertes) lokales <u>Maximum</u> in x_0: $f'(x_0) \geq 0$ (>0) in $(x_0-\delta, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ (<0) in $(x_0, x_0+\delta)$
Sei f zusätzlich ein zweites Mal differenzierbar: $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales <u>Minimum</u> in x_0
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales <u>Maximum</u> in x_0

Konvexität und **Konkavität**:
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u> auf (a,b)
$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b) : (\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \wedge 0 < \alpha,\beta < 1 \wedge \alpha+\beta = 1) : f(\alpha x_1 + \beta x_2) < \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt <u>konkav</u> auf (a,b)
$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b) : (\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \wedge 0 < \alpha,\beta < 1 \wedge \alpha+\beta = 1) : f(\alpha x_1 + \beta x_2) > \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

Ist f auf (a,b) konvex, so ist $[-f(x)]$ auf (a,b) konkav.



folgende Aussagen sind äquivalent:
- f konvex auf (a,b)
- für $x_1 < x < x_2$ gilt: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
- für $x_1 < x < x_2$ gilt: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

Ist $f(x)$ auf (a,b) differenzierbar, so gilt: - f' streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f$ ist konvex
- f' streng monoton fallend $\Leftrightarrow f$ ist konkav

Ist $f(x)$ auf (a,b) zweimal differenzierbar, so gilt: - $f''(x) > 0$ auf $(a,b) \Leftrightarrow f$ ist konvex
- $f''(x) < 0$ auf $(a,b) \Leftrightarrow f$ ist konkav

Wendepunkte:
Hat f einen Wendepunkt in x_0, so gilt: $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung) und $\exists f'''(x_0) \neq 0$ (hinreichende Bedingung).

$F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$ auf $(a,b) \Longleftrightarrow F$ differenzierbar auf (a,b) und $F'(x) = f(x) : \forall x \in (a,b)$.

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Nicht jede Funktion besitzt eine Stammfunktion (z.B.: $f(x) = \begin{cases} 1 & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$) und Stammfunktionen <u>elementarer</u> Funktionen müssen keine elementaren Funktionen sein (z.B.: $\int \frac{\cos(x)}{x} dx$).

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann heißt f **integrierbar** auf $[a,b]$, g.d.w. eine auf $[a,b]$ stetige Stammfunktion von f auf (a,b) existiert. Dann heißt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ **bestimmtes Integral**.

partielle Integration: u, v auf (a,b) differenzierbar und $\exists \int u \cdot v'\,dx \Rightarrow \exists \int u' \cdot v\,dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dx$.
(anwendbar auf: $\int p(x)e^{ax}dx$, $\int p(x)\ln(x)dx$, $\int p(x)\arctan(x)dx$, $\int \cos(ax)e^{bx}dx$, $\int \sin(ax)e^{bx}dx$.)

Integration durch Substitution: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du|_{u=\varphi(x)}$
(Entsprechend gilt die Umkehrung: $\exists x = \varphi^{-1}$, so gilt: $\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx|_{x=\varphi^{-1}(u)} + c$.)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ auf (a,b) und differenzierbar$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

<u>Transformationsformel</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv, streng monoton, stetig auf $[c,d]$ und differenzierbar auf $(c,d) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_c^d (f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|)\,dt$. $\left(\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)$

<u>Integration **rationaler** Funktionen</u> ($R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\mathrm{Grad}(P) < \mathrm{Grad}(Q)$, P, Q keine gemeinsamen Nullstellen):

1. $\int \frac{1}{x - x_0}dx = \ln|x - x_0| + c$
2. $\int \frac{1}{(x-x_0)^k}dx = \int (x-x_0)^{-k}dx = \frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + c$ $\qquad k \neq 1$
3. $\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + (a\alpha+b)\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{a}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + (a\alpha+b)I_1(x)$
mit $I_1(x) = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + c$ $\qquad (\beta \neq 0)$
4. $\int \frac{ax+b}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx = \begin{cases} a\int \frac{x}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx + a\alpha I_k(x) = -\frac{a}{2}\frac{1}{k-1}\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}} + a\alpha I_k(x) \\ b\int \frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx = bI_k(x) \end{cases}$
mit $\beta^2 I_{k+1}(x) = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)I_k(x) + \frac{1}{2k}\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$

d.h.: Integration aller rationalen Funktionen ist vollständig gelöst ($\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung)!

<u>Substitutionsregeln</u>: ($R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} = \frac{\sum a_{jk}u^j v^k}{\sum b_{jk}u^j v^k}$)

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b}), a \neq 0 \xrightarrow{t:=\sqrt[n]{ax+b}} \int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt|_{t=\sqrt[n]{ax+b}} = \int \tilde{R}(t)dt|_{t=\sqrt[n]{ax+b}}$
2. $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $a, c \neq 0$, $ad - bc \neq 0 \xrightarrow{t:=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int \tilde{R}(t)dt|_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$
3. $R(e^x) \xrightarrow{t:=e^x} \int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t}dt|_{t=e^x} = \int \tilde{R}(t)dt|_{t=e^x}$
4. $R(x, \sqrt{x^2+1}) \xrightarrow{x:=\sinh(t)} \int R(x, \sqrt{x^2+1})dx = \int R(\sinh(t), \cosh(t))\cosh(t)dt|_{t=\mathrm{arsinh}(x)} = \int \tilde{R}(\mathrm{e}^t)dt|_{t=\mathrm{arsinh}(x)}$
($\Rightarrow$ vgl.: 3.)

5. $R(x,\sqrt{x^2-1})(|x|>1) \xrightarrow{x:=\cosh(t)} \int R(x,\sqrt{x^2-1})dx = \int \tilde{R}(e^t)dt|_{t=\text{arcosh}(x)}$

6. $R(x,\sqrt{1-x^2})(|x|<1) \xrightarrow{x:=\sin(t)} \int R(x,\sqrt{1-x^2})dx = \int \tilde{R}(\sin(t),\cos(t))dt|_{t=\arcsin(x)}$

7.
   - $\sin(x)R(\cos(x)) \xrightarrow{u:=\cos(x)} \int \sin(x)R(\cos(x))dx = -\int R(u)du|_{u=\cos(x)}$
   - $\cos(x)R(\sin(x)) \xrightarrow{u:=\sin(x)} \int \cos(x)R(\sin(x))dx = \int R(u)du|_{u=\sin(x)}$
   - $R(\cos(x),\sin(x)) \xrightarrow{u:=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \int R(\cos(x),\sin(x))dx = \int R(\underbrace{\frac{1-u^2}{1+u^2}}_{\cos(x)},\underbrace{\frac{2u}{1+u^2}}_{\sin(x)})\frac{2}{1+u^2}du|_{u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \tilde{R}(u)du|_{u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

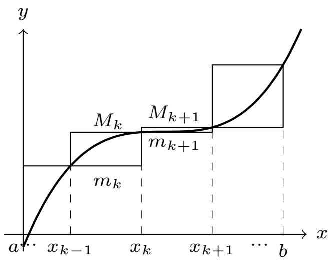
Anmerkung zu 5. (und 6.): $R(x,\sqrt{x^2-1}) = R(x,\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}) = R\left(x,(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ ($\Rightarrow$ vgl.: 2.)

Riemann-Integral:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt ($\exists c\in\mathbb{R}: |f(x)|\leq c$), $a=x_0<x_1<...<x_{k-1}<x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$, $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$
$Z=\{I_1,I_2,...,I_n\}$, $I_k:=[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,...,n)$ heißt "von P erzeugte **Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$" ($\Leftrightarrow Z\sim P$);
mit $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (**Länge** von I_k) und $d(Z)=\max(\Delta x_k)_{1\leq k\leq n}$ (**Feinheit** der Zerlegung Z).
$m_k := \inf_{x\in I_k}(f(x))$, $m:=\inf_{x\in[a,b]}(f(x))$, $M_k:=\sup_{x\in I_k}(f(x))$, $M:=\sup_{x\in[a,b]}(f(x))$.

Untersumme (von f bezüglich Zerlegung Z): $\underline{S}(f,Z)=\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k$,

Obersumme (von f bezüglich Zerlegung Z): $\overline{S}(f,Z)=\sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k$.



Es gilt: $m\cdot(b-a)\leq \underline{S}(f,Z)\leq\overline{S}(f,Z)\leq M\cdot(b-a)$
Sei Z' eine Verfeinerung von Z, das heißt $Z'\sim P'$ mit $P\subset P'$,
$P'=\{x'_0,...,x'_N\}$, $n<N$:
$\Rightarrow \underline{S}(f,Z)\leq\underline{S}(f,Z')\leq\underline{S}(f,Z)+2c(N-n)d(z)$
$\overline{S}(f,Z')\leq\overline{S}(f,Z)\leq\overline{S}(f,Z)+2c(N-n)d(z)$

Z und Z^* seien beliebige Zerlegungen $\Rightarrow \underline{S}(f,Z)\leq\overline{S}(f,Z^*)$.

Unterintegral von f: $\underline{\int_a^b} f := \sup_Z(\underline{S}(f,Z)) = \sup\left(\{\underline{S}(f,Z): Z \text{ Zerlegung von}[a,b]\}\right)$

Oberintegral von f: $\overline{\int_a^b} f := \inf_Z(\overline{S}(f,Z)) = \inf\left(\{\overline{S}(f,Z): Z \text{ Zerlegung von}[a,b]\}\right)$

f heißt "**Riemann-integrierbar**" auf $[a,b]$ ($\Leftrightarrow f\in R([a,b])$) $:\Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f := \int_a^b f$.

$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall$ Zerlegungen mit $d(Z)<\delta(\varepsilon)$: $\underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f,Z)<\varepsilon \wedge \overline{S}(f,Z)-\overline{\int_a^b} f<\varepsilon$.

$(Z_n)_n$ sei eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ mit $d(Z_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$:

$$\lim_{n\to\infty}(\underline{S}(f,Z_n)) = \underline{\int_a^b} f \qquad \wedge \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}(f,Z_n)\right) = \overline{\int_a^b} f$$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt; dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1. $f\in R([a,b])$
2. $\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall$ Zerlegungen Z mit $d(Z)<\delta(\varepsilon)$: $\overline{S}(f,Z)-\underline{S}(f,Z)<\varepsilon$
3. $\forall\varepsilon>0:\exists$ Zerlegung $Z_\varepsilon : \overline{S}(f,Z_\varepsilon)-\underline{S}(f,Z_\varepsilon)<\varepsilon$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **beschränkt** und **monoton** auf $[a,b]\Rightarrow f\in R([a,b])$. $\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **stetig** auf $[a,b]\Rightarrow f\in R([a,b])$.

f gleichmäßig stetig auf $U\in\mathbb{R}\iff\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x,x'\in U$ mit $|x-x'|<\delta: |f(x)-f(x')|<\varepsilon$.
("Steigung" des Graphen unabhängig von der Stelle x für alle $|x-x'|<\delta$ nach oben und unten beschränkt!)

f stetig auf $[a,b]\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$; **aber**: f stetig auf $(a,b)\not\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf (a,b)!

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar, $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und Stammfunktion von f:

$$\Longrightarrow \int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad \left(= \int_a^b f(x)dx\right)$$

Wobei:
1. $f \in R([a,b]) \not\Longrightarrow \exists$ Stammfunktion
2. $\exists$ Stammfunktion von $f \not\Longrightarrow f \in R([a,b])$
3. f stetig auf $[a,b] \Rightarrow \exists$ Stammfunktion
4. f stetig auf $[a,b] \backslash N$, wobei N "Nullmenge" (N endlich oder auch abzählbar unendlich), dann $f \in R([a,b])$.