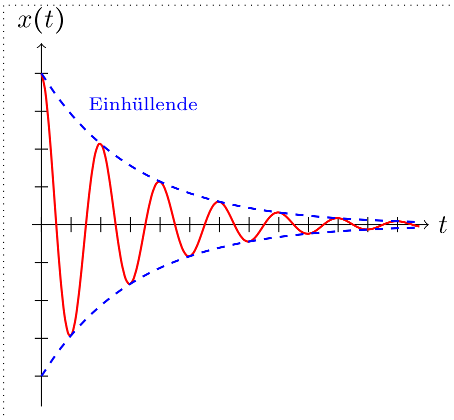


Schwingfall der freien, gedämpften Schwingung

Differentialgleichungsbegriffe:

1. gewöhnlich - partiell (z.B.: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$)
2. Ordnung (höchste, vorkommende Ableitung)
3. linear($y' - h(x)y = g(x)$) - nichtlinear (z.B.: $y' - \sin(y) = g(x)$)
4. homogen ($y' - h(x)y = 0$) - inhomogen ($y' - h(x)y = g(x)$)
5. Integral (Lösung) - Quadratur (nicht lösbar)
6. allgemeine Lösung - partikuläre Lösung (fallspezifische)

Orthogonaltrajektorien: Die Figuren, die die Kurvenschar sämtlich unter rechtem Winkel schneiden ($f_1' = -\frac{1}{f_2'}$)

exakte Differentialgleichungen: Integrabilitätstbedingung ($\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$) erfüllt für $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$; .
dann gilt: $A(x,y)dx + B(x,y)dy = \underline{dU(x,y) = 0} \to U(x,y) =$ konstant
andernfalls gilt: $(\lambda(x,y)\ A(x,y))dx + (\lambda(x,y)\ B(x,y))dy = 0$ mit $\lambda(x,y)$: integrierender Faktor;
dabei reicht eine spezielle Lösung für $\lambda(x,y)$.

$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$, a,b,c = konstant; Exponentialansatz: $y = e^{\lambda x}$; λ =konstant.
$\Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$ mit $e^{\lambda x} \in \mathbb{R} \neq 0$
$\Rightarrow$ charakteristische Gleichung: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ und somit $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$\Rightarrow y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \qquad c_1 = \frac{y(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y'(x)}{y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x)} \qquad c_2 = \frac{y(x)\,y_1'(x) - y_1(x)\,y'(x)}{y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x)}$$

Wronski-Determinante:
$W(x,y_1,y_2) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x) \neq \mathbf{0}$
($\Rightarrow$ y_1, y_2 bilden ein Fundamentalsystem)

(Ist $W(x,y_1,y_2) = 0$, so erhält man über Variation der Konstanten folgendes: $y = (c_1 + c_2x)e^{\lambda x}$.)

<u>Die freie, ungedämpfte Schwingung</u>: **Federpendel** (Hook'sches Gesetz: $F = -k \cdot x$)
$-kx = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + (\omega_0)^2 x = 0$ mit $(\omega_0)^2 = \frac{k}{m}$ und daraus folgt:
$$x(t) = c_1e^{i\omega_0 t} + c_2e^{-i\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = \alpha\cos(\omega_0 t - \theta)$$
$$c_1, c_2 \in \mathbb{C},\quad A = (c_1 + c_2) = \alpha\cos(\theta) = x_0,\quad B = i(c_1 - c_2) = \alpha\sin(\theta) = \frac{v_0}{\omega_0},\quad A, B, \alpha, \theta \in \mathbb{R}$$

<u>Linearisierte Schwingungen, Gleichgewichtslagen</u>:

notwendige Bedingung eines Gleichgewichts: $F(x_0) = 0$ hinreichende Bedingung: $\begin{cases} \text{stabil: } F'(x_0) < 0 \\ \text{instabil: } F'(x_0) > 0 \end{cases}$.
Dann führt man ein lineares Taylor-Polynom für die Kraft an x_0 ein und kann daraus die Schwingung um x_0 beschreiben:
$$\begin{cases} x_{x_0}(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) & ,\omega_0 = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} \quad \text{(stabil)} \\ x_{x_0}(t) = x_0 + Ce^{\omega_0 t} + De^{-\omega_0 t} & ,\omega_0 = \sqrt{\frac{F'(x_0)}{m}} \quad \text{(instabil)} \end{cases}.$$

<u>Die freie, gedämpfte Schwingung</u>: **Federpendel** unter geschwindigkeitsproportionalem **Reibung**seinfluss
($F = m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$)

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0{}^2}$ $\gamma, k > 0$, $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{\gamma}{m}$:

a) $\beta^2 - 4\omega_0{}^2 < 0$:
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm i\Omega$
mit $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega_0{}^2}} < \omega_0$
$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t}\alpha\cos(\Omega t - \theta)$
Schwingfall
(unterkritische Dämpfung)

b) $\beta^2 - 4\omega_0{}^2 = 0$:
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2} < 0 \in \mathbb{R}$
$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-\frac{\beta}{2}t}$
aperiodischer Grenzfall
(kritische Dämpfung)

c) $\beta^2 - 4\omega_0{}^2 > 0$:
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \hat{\Omega}$
mit $\hat{\Omega} = \frac{\beta}{2}\sqrt{1 - \frac{4\omega_0{}^2}{\beta^2}} < \frac{\beta}{2}$
$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t}(A\cosh(\hat{\Omega}t) + B\sinh(\hat{\Omega}t))$
Kriechfall
(überkritische Dämpfung)

Superpositionsprinzip: Sind f_1 bis f_n Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung, so ist auch jede Linearkombination dieser Lösungen $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung.

Lösungsstrategien für lineare, inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = F(x) \qquad , a \neq 0$$

A) 1) Zerlegung in 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung: $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \cdot y}_{:=u(x)} = \frac{1}{a}F(x)$

2) Aus $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \cdot u(x) = \frac{1}{a}F(x)$ dann $u(x)$ bestimmen

3) mit $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \cdot y = u(x)$ schließlich $y(x)$ ermitteln.

4) (Dabei erhält man sofort $y = y_{\text{homogen}} + y_{\text{partikulär}}$.)

5) Und ganz am Schluß erst mit eventuellen Anfangswerten die erhaltene Lösung anpassen.

B) 1) homogene Lösung ermitteln: $y_h = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

2) Konstanten c_1 und c_2 variieren: $y_p = u(x) \cdot y_1 + v(x) \cdot y_2$

3) (In die Differentialgleichung einsetzen, vereinfachen, umformen,...)

4) $\Rightarrow u' = -\frac{1}{a}F(x)\frac{y_2}{W(x,y_1,y_2)}$ und $v' = \frac{1}{a}F(x)\frac{y_1}{W(x,y_1,y_2)}$ (Wronski-Determinante $W(x,y_1,y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$)

5) u' und v' integrieren, in y_p einsetzen

6) erhaltenes $y_{\text{partikulär}}$ mit y_{homogen} linear kombinieren: $y_{\text{allgemein}} = y_p + y_h$

C) abhängig von $F(x)$ verschiedene Ansätze für die Lösung y_p verwenden:

a) für $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (Polynom n-ten Grades) $\Rightarrow y_p = \sum_{k=0}^{n} \tau_k x^k$

b) für $F(x) = Ae^{\rho x} \Rightarrow y_p = \tau e^{\rho x}$ (ρ gegeben)

c) für $F(x) = a_1\cos(\rho x) + a_2\sin(\rho x) \Rightarrow y_p = \tau_1\cos(\rho x) + \tau_2\sin(\rho x)$ (ρ gegeben)

Erzwungene Schwingungen: $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + \overbrace{F_0\cos\omega t}^{\text{periodische Erregung von außen}} \iff \ddot{x} + \beta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = f_0\cos(\omega t)$

(mit $f_0 = \frac{F_0}{m}, \beta = \frac{\gamma}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Eigenfrequenz, ω Erregerfrequenz)

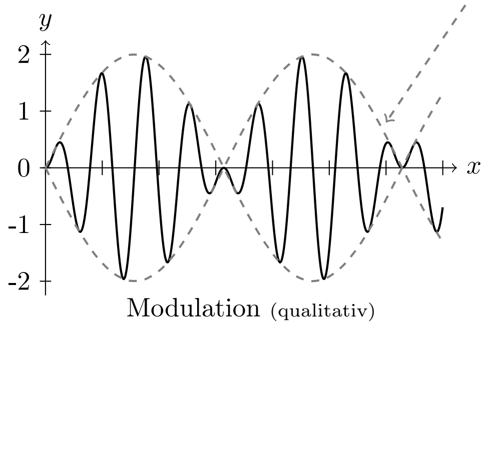
ohne Reibung ($\beta = 0$)

$x_{\text{partikulär}}(t) = \frac{f_0}{{\omega_0}^2-\omega^2}\cos(\omega t)$ und $x_{allgemein} = x_{\text{homogen}} + x_{\text{partikulär}} = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{{\omega_0}^2-\omega^2}\cos(\omega t)$.

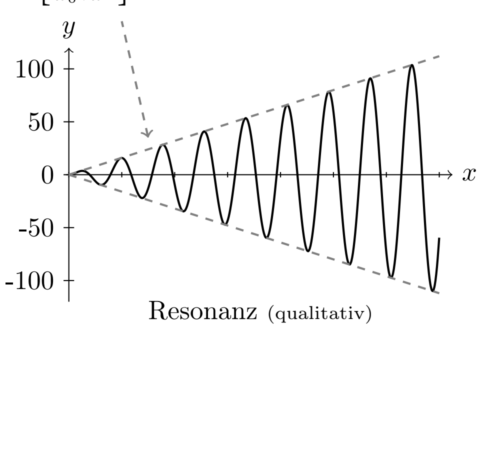
x_p ist dabei abhängig vom Verhältnis der Frequenzen bestimmt: $x_p = \begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \frac{f_0}{{\omega_0}^2}\cos(\omega t) \\ \omega \gg \omega_0 & -\frac{f_0}{\omega^2}\cos(\omega t) \\ \omega = \omega_0 & \text{Resonanz} \end{cases}$

Mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ ergibt sich $x(t) = \left[\frac{2f_0}{{\omega_0}^2-\omega^2} \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)}_{\text{niedrige Frequenz}}\right] \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)}_{\text{hohe Frequenz}}$ mit der **Dissonanz** $\frac{\omega_0+\omega}{2}$.

Nähert man sich mit ω ω_0, so erhält man Resonanz mit $x(t) = \left[\frac{f_0}{\omega_0+\omega}t\right]\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$.



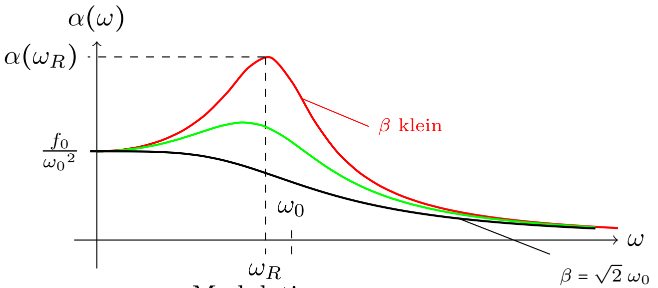
Modulation (qualitativ)



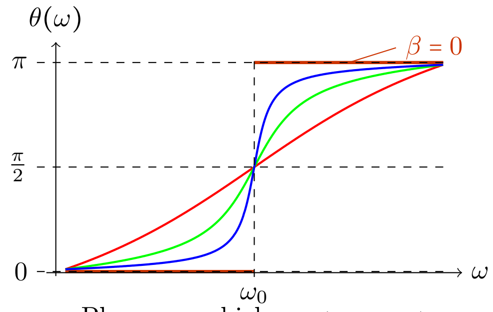
Resonanz (qualitativ)

mit Reibung: $(\beta \neq 0)$

$$x_p = \frac{f_0}{({\omega_0}^2-\omega^2)+\beta^2\omega^2}\left[({\omega_0}^2-\omega^2)\cos(\omega t)+\beta\omega\sin(\omega t)\right] = \overbrace{\frac{f_0}{\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)+\beta^2\omega^2}}}^{\alpha(\omega)}\cos(\omega t - \overbrace{\arctan\left(\frac{\beta\omega}{{\omega_0}^2-\omega^2}\right)}^{\theta(\omega)})$$



Modulation (qualitativ)



Phasenverschiebung (qualitativ)

Erzwungene Schwingung läuft nach $(t_s = t_E + \frac{\theta}{\omega})$.

Linienintegrale:
Kraft in Form eines Vektorfeldes $(F = F(x,y,z))$, ein Weg in Abhängigkeit einer unabhängigen Variablen $(r = r(t))$; Arbeit ist dann das Integral der Kraft über den Weg: $W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}dt$.

Wegunabhängigkeit:

Annahme: Energie ist Wegunabhängig $(\vec{F}\cdot\vec{v} = -\frac{dU}{dt}) \Longrightarrow W = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{dt}dt = -\int_{P_1}^{P_2}dU = -(U_2 - U_1)$.
$\vec{F}\cdot\vec{v} = -\frac{dU}{dt} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) = -\mathrm{grad}(U)\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \vec{F} = -\mathrm{grad}(U)$. Das heißt: $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ ist ein vollständiges Differential und nach Integrabilitätskriterium einer exakten Differentialgleichung muss dann gelten:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad\wedge\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad\wedge\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

Dann gilt: $\vec{F}$ ist ein **konservatives Vektorfeld**!

(In diesem Fall gilt: $W = -\oint dU = 0$)

Das **Potential** U lässt sich dann entweder über Integration der einzelnen Kräfte (F_x, F_y, F_z) berechnen oder wie folgt:

$$U = -\int_{x_0}^{x} F_x(\xi, y_0, z_0)d\xi - \int_{y_0}^{y} F_y(x,\eta,z_0)d\eta - \int_{z_0}^{z} F_z(x,y,\zeta)d\zeta$$

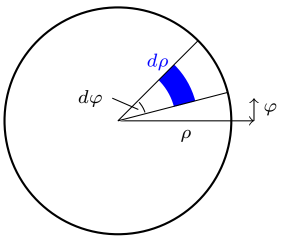
Doppel- und Dreifachintegrale:

Rechteckfläche: $A = \int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{b} 1\,dy\right)dx = \int_{y=0}^{b}\left(\int_{x=0}^{a} 1\,dx\right)dy = \left[\int_{x=0}^{a} 1\,dx\right]\cdot\left[\int_{y=0}^{b} 1\,dy\right] = a\cdot b$

Kreisfläche: $A = 2\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-x^2})dx = \int_{x=-r}^{r}\left(\int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\,dy\right)dx = \int_{\rho=0}^{r}\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho\,d\varphi\right)d\rho = \pi r^2$

Kugelvolumen: $V = \int_{x=-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx = 2\int_{x=-R}^{R}\left(\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx$

$$= \int_{x=-R}^{R}\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1dz\,dy\,dx == \frac{4\pi}{3}R^3$$



$$\begin{aligned} dA &= \frac{d\varphi}{2\pi}\left[\pi(\rho+d\rho)^2 - \pi\rho^2\right] \\ &= \frac{d\varphi}{2}\left[\rho^2 + 2d\rho + d\rho^2 - \rho^2\right] \\ &= \frac{1}{2}d\varphi d\rho\left[2\rho + \underbrace{d\rho}_{\text{vernachlässigbar klein im Verhältnis zu } 2\rho}\right] \quad \xrightarrow{d\rho\to 0} \quad \rho\,d\rho\,d\varphi \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: (Orthogonalkoordinaten)

ρ: Radius; φ: Azimutwinkel; ϑ: Poldistanz.

$dA = \underbrace{\rho\, d\vartheta}_{\text{Meridiankreis}} \cdot \underbrace{\rho \sin(\vartheta)\, d\varphi}_{\text{Breitenkreis}}$; $dV = dA\, d\rho = \rho^2 d\rho \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$.

Oberfläche der Einheitskugel: $A = \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$

Zylinderkoordinaten:

ρ: Radius; φ: Azimutwinkel; z: Höhe; $dV = d\rho\rho\, d\varphi\, dz$.

<u>Green'sche Satz</u>: $\Phi(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, geschlossener Weg, 2-dimensional.

$$\oint_C \vec{\Phi} d\vec{r} = \oint_C \left(P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$