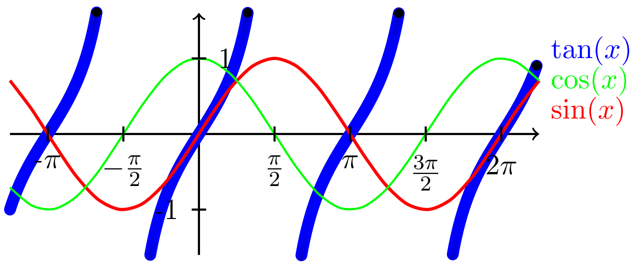
E	P	T	G	M	k	h	da
Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hekto	Deka
10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}
Trillion	Billiarde	Billion	Milliarde	Million	Tausend	Hundert	Zehn
a	f	p	n	μ	m	c	d
Atto	Femto	Piko	Nano	Mikro	Milli	Zenti	Dezi
10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}

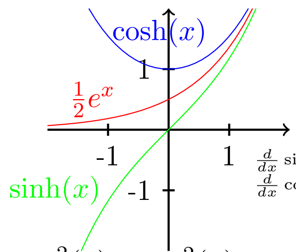
Das griechische Alphabet

A	α		Alpha
B	β		Beta
Γ	γ		Gamma
Δ	δ		Delta
E	ϵ	ε	Epsilon
Z	ζ		Zeta
H	η		Eta
Θ	θ	ϑ	Theta
I	ι		Iota
K	κ	$\varkappa$	Kappa
Λ	λ		Lambda
M	μ		My
N	ν		Ny
Ξ	ξ		Xi
O	o		Omikron
Π	π	ϖ	Pi
P	ρ	ϱ	Rho
Σ	σ	ς	Sigma
T	τ		Tau
Υ	υ		Ypsilon
Φ	ϕ	φ	Phi
X	χ		Chi
Ψ	ψ		Psi
Ω	ω		Omega

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0



$$e = \lim_{\varepsilon \to 0} (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$



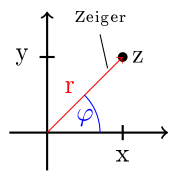
$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$
$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\cosh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$z = x + iy$ Realteil von z: $Re(z) = x$; Imaginärteil von z: $Im(z) = y$

$i^2 = -1$; (i ist die imaginäre Einheit) $\Rightarrow z = x + iy$ ist konjugiert komplex zu $\overline{z} = x + (-i)y$



$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{y_1x_2+x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

$r = |z| \quad \Rightarrow \quad r^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}$

$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$; Azimut / Argument von z ($arg(z)$)

$$\Downarrow$$
$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

vollständige Induktion:

	Induktionsvoraussetzung	(Problem für n)
	Induktionsbehauptung	(Problem für $n+1$)
	Induktionsanfang	(Problem für $n = 0$ / $n = 1$)
	Induktionsschritt	(Behauptung wird auf Voraussetzung zurückgeführt)

Euler: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad z = Ae^{i\varphi}$

$\cos(\varphi) = \cosh(i\varphi)$
$\sin(\varphi) = -i\sinh(i\varphi)$

Moivre: $z^{\pm n} = r^{\pm n}[\cos(\pm n\varphi) + i\sin(\pm n\varphi)]; \qquad n \in \mathbb{N}$

Vektoren: Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\sphericalangle[\vec{a},\vec{b}]) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

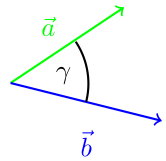
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (kommutativ)

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ (Assoziativgesetz gilt <u>nicht</u>)

Das Skalarprodukt ist bei Drehung des Koordinatensystems invariant!



Vektorprodukt: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (<u>nicht</u> kommutativ, rechtshändig)

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin(\sphericalangle[\vec{a},\vec{b}])|$

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \vee \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$: $\quad \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$ (Distributivgesetz gilt)

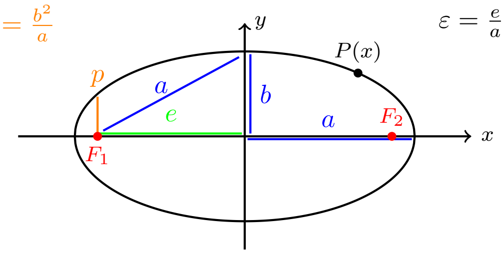
$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen (1,2,3,4,...)
$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen (...,-2,-1,0,1,2,...)
$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen ($\frac{a}{b}; a,b \in \mathbb{Z}$)
$\mathbb{R}$ reelle Zahlen ($\sqrt[n]{x}, \pi, e, ...$)
$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen ($z = x + iy$)

Kreis: Menge der Punkte in der Ebene, die von einem Punkt einen konstanten Abstand haben.
$x^2 + y^2 = r^2 \quad / \quad r = const.$
r = Radius

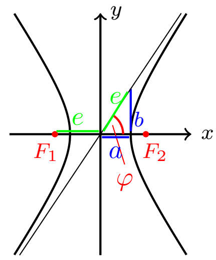
Achsenabschnittsgleichung: $\frac{n_1}{c}\vec{i} + \frac{n_2}{c}\vec{j} + \frac{n_3}{c}\vec{k} = 1$
hessische Normalform: $\frac{n_1}{n}\vec{i} + \frac{n_2}{n}\vec{j} + \frac{n_3}{n}\vec{k} = \frac{c}{n}$

Ellipse: Die Menge der Punkte in der Ebene deren Summe der Abstände zu zwei Punkten konstant ist.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad / \quad r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$
a: große Halbachse; b: kleine Halbachse;
e: lineare Exzentrizität; ε: numerische Exzentrizität;
p: Ellipsen-(Halb-)parameter;
$\overline{F_1P}$: Fahrstrahl, Leitstrahl, Radiusvektor

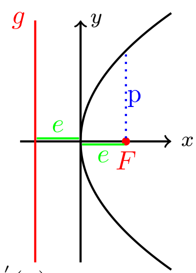
$p = \frac{b^2}{a}$ $\qquad \varepsilon = \frac{e}{a}$



Hyperbel: Die Menge der Punkte, deren Differenz der Abstände zu zwei Punkten konstant ist.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad / \quad r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)}, \qquad \varepsilon > 1$
a: Scheitelabstand; b: imaginäre Achse
Grenzwinkel: $\cos(\varphi_G) = \frac{1}{\varepsilon}; \quad \tan(\varphi_G) = \frac{b}{a}$
$\Rightarrow$ Asymptoten: $y = \pm\frac{b}{a}x$



Parabel: Die Menge der Punkte in der Ebene, deren Abstand zu einem Punkt und einer Geraden gleich sind.
$y^2 = 4ex = 2px \quad / \quad r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)}, \qquad \varepsilon = 1$
g: Leitlinie, Direktrix; $y^2 = 4ex$: Scheitelgleichung



Differenzenquotient: $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\qquad f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)|_{x=x_0}$

Differentialquotient: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \dfrac{d}{dx}f(x)$

$\overline{x}_{arit.} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

$\overline{x}_{geom.} = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}$

$\overline{x}_{harm.} = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

$y = x^n, \qquad \frac{d}{dx}y = nx^{n-1}$

Produktregel: $y = u(x)\cdot v(x) \qquad \frac{d}{dx}y = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Quotientenregel: $y = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \frac{d}{dx}y = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Kettenregel: $y = u[v(x)] \qquad \frac{d}{dx}y = v'(x)u'[v(x)]$

(Abszisse|Ordinate) = (x|y)

zyklometrische Funktionen: Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

$y = \sin(x) \qquad y = \arcsin(x) \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\arcsin(x)) = x = \arcsin(\sin(x))$

y	$y' \equiv \frac{d}{dx}y$
$a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$	$a \cdot u'(x) + bv'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u[v(x)]$	$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$
$c = const.$	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)a^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

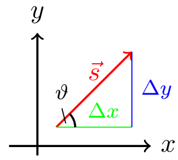
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen

Partielle Ableitung: $\frac{\partial}{\partial x} f$
Kettenregel: $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
Reisegleichung: $\frac{d}{dt} f = (\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}) \cdot \vec{v}$
Tangentialebene: $[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}] \cdot [\Delta x\ \vec{i} + \Delta y\ \vec{j} + \Delta z\ \vec{k}]$

Richtungsableitung: $\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\vartheta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\vartheta)$

Höhenlinien: $\tan(\vartheta_h)|_{P_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}|_{P_0}$

max. / min. Anstieg: $\tan(\vartheta_m)|_{P_0} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}|_{P_0}$



Gradient: $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = grad(f)$

Der Gradient ist in Richtung des steilsten Anstiegs / Abfalls mit dem entsprechenden Betrag als Wert (bei $|\vec{s}| = 1$).

Ex falso sequitur quodlibet.

Integration durch Substitution:

$$\int u(v(x)) \cdot \frac{dv}{dx}\, dx = \int u(a)\, da \qquad \text{mit } a = v(x)$$

partielle Integration:

$$\int \frac{du(x)}{dx} v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)\frac{dv}{dx}\, dx$$

Binomialkoeffizient: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$
Bernoulli-Ungleichung: $(1 + a)^n \geq 1 + na$

arithm./geometr. Mittel: $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{injektiv: } \forall x_1, x_2 \in X : [(f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2)\ \vee\ (x_1 \neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2))] \\ \text{surjektiv: } f(A) = B \quad \forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\end{array}\right\} \text{bijektiv (eineindeutig)}$$

Schnitt $M \cap N = \{x : x \in M \wedge x \in N\}$
Vereinigung: $M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\}$
Differenz: $M \backslash N = \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$
Symmetrische Differenz: $M \triangle N : (M \backslash N) \cup (N \backslash M) = (M \cup N) \backslash (M \cap N)$
Familie A_α von Mengen $\alpha \in I$: $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I : x \in A_\alpha\}$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha\}$$

Taylor-Reihe: f(x) sei beliebig oft stetig differenzierbar, x_0 Entwicklungspunkt, $f^{(n)}$ sei die n-te Ableitung:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x - x_0)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$