f beschränkt und stetig auf $[a,b] \Rightarrow f \in R([a,b])$; f monoton und beschränkt $\Rightarrow f \in R([a,b])$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar, $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und Stammfunktion von f:

$$\Longrightarrow \int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad \left(= \int_a^b f(x)dx\right)$$

Daher gilt: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F\left(b(x)\right) - F\left(a(x)\right)\right] = f(b(x))\dfrac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x} - f(a(x))\dfrac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}$.

Außerdem:

- $f, g \in R([a,b]), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in R([a,b]) \wedge \int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b g dx$ (Linearität)
- $f, g \in R([a,b]) : \forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$
- $f \in R([a,b]) : c \in (a,b) \Rightarrow \{f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])\}$
  $\wedge \left\{\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx\right\}$
- f stückweise stetig auf $[a,b]$ (d.h.: $[a,b] = I_1 \cup ... \cup I_n : I_k = [x_{k-1}, x_k] : \forall k = 1, ..., n \Rightarrow f$ stetig auf $\overset{0}{I}_k$ und $\exists \lim_{x \to x_k \pm 0} f(x) : \forall k = 0, ..., n) \Rightarrow f \in R([a,b])$
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b]) \wedge \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow f \cdot g \in R([a,b]) \wedge \int_a^b |f(x) \cdot g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b] \Rightarrow \left\{\int_a^b |f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow f = 0\right\}$ auf $[a,b]$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und beschränkt; dann besitzt f eine Stammfunktion; diese ist gegeben durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(F(a) := 0, x \in [a,b])$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$f, g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig, } g(x) \geq 0 \text{ auf } [a,b] \text{ (o.B.d.A)} \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Insbesondere für $g(x) = 1$ gilt: $\exists \xi \in (a,b) : \displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$ (d.h.: $\underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx}_{\text{Integralmittelwert}} = f(\xi)$).

Satz von Taylor: Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (m+1)-mal stetig differenzierbar und $x, x_0 \in (a,b)$, dann gilt:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_{m,f}(x)} + \underbrace{\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt}_{R_m(x)}.$$

Lagrange-Restglied: $R_m(x) = \dfrac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{(m+1)}$, wobei $\xi(x_0, x)$ zwischen x und x_0 liegt.

Das Restglied gibt dabei den **Approximationsfehler** bei Approximation einer Funktion f mit $T_{m,f}(x)$ an:

$$\Rightarrow |f(x) - T_{m,f}(x)| \leq |R_m(x)| \leq \frac{C}{(m+1)!}|x-x_0|^{(m+1)} = \begin{cases} = O\left(|x-x_0|^{(m+1)}\right) & \text{für } x \to x_0 \quad \left(\text{d.h.: } \frac{|R_m(x)|}{|x-x_0|^{m+1}} \leq C\right) \\ = o\left(|x-x_0|^{m}\right) & \text{für } x \to x_0 \quad \left(\text{d.h.: } \frac{|R_m(x)|}{|x-x_0|^{m}} \to 0\right) \end{cases}$$

$f \in C^\infty\left((a,b)\right)$, d.h. f ist beliebig oft auf (a,b) differenzierbar, und $x, x_0 \in (a,b)$, dann gilt:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{“Taylorreihe”}} \Longleftrightarrow \lim_{m \to \infty} R_m(x) = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in (-1,1] : \ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}}$$

Numerische Integration:

Riemann'sche Zwischensumme: $Z = \{I_1, ..., I_n\}$ Zerlegung, $\xi^n = (\xi_1, ..., \xi_n)$ mit $\xi_k \in I_k$ $(k = 1, ..., n)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt; dann heißt $S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ **Zwischensumme**. Dabei gilt: $\underline{S}(f, Z) \leq S(f, Z, \xi) \leq \overline{S}(f, Z)$.

Sei $f \in R([a, b])$, dann gilt:

1. Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen, $\lim_{n\to\infty} d(Z_n) \to 0$, ξ^n ein n-dimensionaler Vektor $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, Z, \xi^n)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\overbrace{\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}^{\xi_k}}_{:=S_{nf}}$.
3. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Lipschitz-stetig** auf $[a, b]$ (,d.h. $\exists L > 0 : \forall x, x' \in [a, b] : |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$)
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - S_{nf}\right| \leq \frac{L(b-a)^2}{n}.$$

Lipschitz-Bedingung ist erfüllt, wenn f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ($\Leftrightarrow f \in C^1([a, b])$) ist.

Allgemein gilt: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_k}_{\text{Gewichte}} f(\xi_k)$.

Trapezregel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff'bar, $|f''(x)| \leq C$, $h = \frac{b-a}{n}$
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f dx - h\left[\frac{f(a)}{2} + \left(\sum_{i=1}^{n} f(a + ih)\right) + \frac{f(b)}{2}\right]\right| \leq \frac{C}{12n^2}(b-a)^3.$$

Simpson-Regel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 4-mal stetig differenzierbar, $|f''''(x)| \leq C$, $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, ..., n)$, $h = \frac{b-a}{n}$
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f dx - \frac{h}{6}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\right]\right| \leq \frac{C}{2880n^4}(b-a)^5.$$

Kurven:
Darstellung: $t \to x = \Phi(t) = (\Phi_1(t), ..., \Phi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$
Beispiel Kreis:

- implizit: $x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$
- explizit: $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ $(\sim y = f(x),\ a \leq x \leq b)$
- Parameter: $x = a \cdot \cos(t)$, $y = a\sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- Polarkoordinaten: $r = a$ $(\sim r = f(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
- in $\mathbb{C}$: $z(\varphi) = a \cdot e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Sei $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$, $(n \geq 2)$. $\Phi(t) = (\Phi_1(t), ..., \Phi_n(t))$, wobei $\Phi_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., n)$.

Wir setzen $\dot\Phi(t) = \begin{bmatrix} \dot\Phi_1(t) \\ \vdots \\ \dot\Phi_n(t) \end{bmatrix}$, $\dot\Phi_j(t) = \frac{d\Phi_j(t)}{dt}$. $\quad ||\dot\Phi(t)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\dot\Phi_j(t)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$ heißt **Länge** des Vektors $\dot\Phi(t)$.

$\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **Weg** $\Leftrightarrow \Phi_j$ stetig auf $[a, b]$, $(j = 1, ..., n)$.
$\Phi(a)$ heißt **Anfangs-** und $\Phi(b)$ **Endpunkt** des Weges.
Φ heißt **geschlossen** $\Leftrightarrow \Phi(a) = \Phi(b)$.
Φ heißt **Jordanweg** $\Leftrightarrow \Phi$ ist injektiv auf (a, b).
Φ heißt **glatt** $\Leftrightarrow \Phi$ ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$ $(\Phi \in C^1([a, b]))$.
Φ heißt **stückweise glatt** $\Leftrightarrow \exists$ Zerlegung $Z = \{I_1, ..., I_l\}$ von (a, b), so dass $\Phi : I_k \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg ist $(k = 1, ..., l)$.
Ein glatter Weg heißt **regulär** $\Leftrightarrow \dot\Phi(t) \neq 0$ auf (a, b).
$\Gamma := \Phi([a, b]) = \{\Phi(t) : t \in [a, b]\}$ heißt die von Φ erzeugte **Kurve**. Φ nennt man Parameterdarstellung von Γ. (Schreibweise: (Γ, Φ); die Begriffe "glatt", "stückweise glatt", "Jordan" und "regulär" übertragen sich auf Kurven.)

$\dot\Phi(t) \neq 0 \Rightarrow \dot\Phi$ ist **Tangentenvektor** an Γ und $\frac{\dot\Phi(t_0)}{||\dot\Phi(t_0)||}$ ist Tangenteneinheitsvektor an (Γ, Φ) in $\Phi(t_0)$.

Zwei Wege $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\Psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen **äquivalent** $\Leftrightarrow \exists h : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar und bijektiv mit $\dot{h}(t) > 0$ auf $[a,b]$, so dass $\Phi(t) = \Psi(h(t))$, $t \in [a,b]$.
Äquivalente Wege beschrieben die gleiche Kurve ($\Phi([a,b]) = \Psi([c,d]) = \Gamma$) bei gleicher Orientierung (wegen $\dot{h}(t) > 0$).
Der Tangenteneinheitsvektor ist unabhängig von der Auswahl der Parameterdarstellung.

Sei $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg, $Z = \{I_1, ..., I_l\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $V(\Phi, Z) = \sum_{i=1}^{l} ||\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})||$ $= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{n} [\Phi_k(t_i) - \Phi_k(t_{i-1})]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; dann heißt $L(\Phi) = \sup_Z V(\Phi, Z) = \int_a^b ||\dot{\Phi}(t)|| dt$ **Länge** des Weges.
Sind $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\Psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ äquivalent, so gilt: $L(\Phi) = L(\Psi)$.
(Γ, Φ) sei eine glatte Jordankurve $\Rightarrow L(\Gamma) = L(\Phi)$ heißt **Bogenlänge** von Γ.

Ist Φ stückweise glatt $\Rightarrow L(\Phi) = \sum_{j=1}^{l} L(\Phi_j)$.

Daher gilt für Kurven in der Ebene:

- explizite Darstellung: $y = f(x)$, $a \le x \le b$, $f \in C^1([a,b])$ und $\Gamma = \text{Graph}(f)$
  $$\Rightarrow L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$
- in Polarkoordinaten: $r = g(\varphi)$, $a \le \varphi \le b$, g stetig differenzierbar und Jordankurve ($\to$ injektiv)
  $$\Rightarrow L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{[g'(\varphi)]^2 - [g(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Uneigentliche Integrale:

1. $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \in R([a+\varepsilon, b]) : \forall 0 < \varepsilon < b-a$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.
   $\int_a^b f(x)dx$ heißt **konvergent** $\Leftrightarrow \exists \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$; sonst heißt $\int_a^b f(x)dx$ **divergent**. (Analog für $[a,b)$.)
2. $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f \in R([a,r)) : \forall r > a$: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{r \to \infty} \int_a^r f(x)dx$ (falls existent; analog für $(-\infty, a]$, Konvergenz und Divergenz analog zu 1.)).
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in R([a,b]) : \forall -\infty < a < b < \infty$: $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$.
4. $\int_I f(x)dx$ (I, f wie oben) heißt **absolut konvergent** $\Leftrightarrow \int_I |f(x)|dx$ konvergent.

$F : (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, dann gilt (insbesondere): $\lim_{x \to a_+} F(x) \in \mathbb{R}$ und $\exists \lim_{x \to b_-} F(x) \in \mathbb{R}$.

Majorantenkriterium: $0 \le f(x) \le g(x)$ auf I: $\exists \int_I g(x)dx \Rightarrow \exists \int_I f(x)dx \le \int_I g(x)dx$.
$\int_I f(x)dx$ divergent $\Rightarrow \int_I g(x)dx$ divergent.

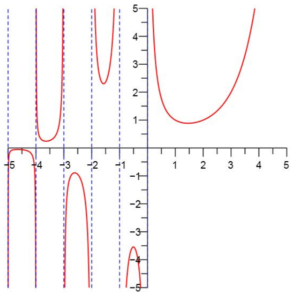
Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz; d.h. $\exists \int_I |f(x)|dx \Rightarrow \exists \int_I f(x)dx$ und $|\int_I f(x)dx| \le \int_I |f(x)|dx$.

Integralkriterium für Reihen
$m \in \mathbb{N}$, $f : [m,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend und nicht negativ, dann gilt:
$$\int_m^\infty f(x)dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty.$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} : \forall \alpha < 1$
$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} : \forall 1 < \alpha < \infty$
$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} dx = 2$
$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$
$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \infty$
$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx < \infty$

Gammafunktion: $\Gamma(x) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.
Es gilt: $\Gamma(x) > \frac{1}{e}\frac{1}{x}$, $\lim_{x \to 0_+} \Gamma(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \infty} \Gamma(x) = +\infty$.
Außerdem: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$,
$\Gamma \in C^\infty((0,\infty))$ mit $\Gamma^{(j)} = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} [\ln(t)]^j \, dt$,$j \in \mathbb{N}$ und $\Gamma(x)$ ist konvex.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$



$\Gamma(x)$ im Reellen

$f_j : I \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $(f_j)_j$ Folge, bzw. $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ Reihe von Funktionen ($x \in \mathbb{R}$ fest $\Rightarrow f_j(x)$ Folge und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j$ unendliche Reihe), dann:

1. $(f_j)_j$ heißt **punktweise konvergent** auf $I \Leftrightarrow \forall x \in I : \exists \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) \in \mathbb{R}$
2. $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j$ heißt **punktweise konvergent** $\Leftrightarrow \forall x \in I : \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} f_j(x)$.

Gleichmäßige Konvergenz:

1. f_j konvergiert gleichmäßig nach f auf $I \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in I}|f_j(x) - f(x)|\right) = 0$.
2. $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j$ konvergiert gleichmäßig nach f auf $I \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in I}|f(x) - \sum\limits_{j=0}^{n} f_j(x)|\right) = 0$.

$\Rightarrow$ Approximation von f durch f_j: $\quad \forall \varepsilon > 0 : \exists j(\varepsilon) : \underline{\underline{\forall x \in I}} : \forall j \geq j(\varepsilon) : |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon$ (analog für Reihen).

Cauchy-Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz:

Es sei $(f_j)_j$ eine Folge von Funktionen $f_j : I \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig auf f konvergieren, dann gilt:

$$\exists f \text{ und } \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) \text{ gleichmäßig auf } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists j(\varepsilon) : \forall j,k \geq j(\varepsilon) : \sup_{x\in I}|f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Weierstraß-Konvergenzkriterium:

Es sei $f_j : I \to \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}_0$ und $\forall j \in \mathbb{N}_0 : \exists c_j \geq 0$, so dass $\sup\limits_{x\in I}|f_j(x)| \leq c_j$ (c_j ist Majorante von $|f_j|$) und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j < \infty$ (konvergente Majorante) ist; dann ist $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ absolut konvergent und gleichmäßig konvergent auf I.

$f_j : I \to \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}_0$, stetig in $x_0 \in I$ und $f_j \xrightarrow{(j\to\infty)} f$ gleichmäßig auf I
$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0.

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[\lim_{j\to\infty} f_j(x)] = \lim_{j\to\infty}[\lim_{x\to x_0} f_j(x)]\right)$$

Analog gilt für Reihen: f_j stetig in x_0, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j = f$ gleichmäßig konvergent auf $I \Rightarrow f$ ist stetig in x_0.

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)] = \sum_{j=0}^{\infty}[\lim_{x\to x_0} f_j(x)]\right)$$

gleichmäßig konvergent:

$\sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j$ auf $[a,b] \subset (-1,1)$

$\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x$ auf $\mathbb{R}$;

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{j^2}$ auf $\mathbb{R}$;

$\sum\limits_{j=0}^{\infty}(|a_j| + |b_j|) < \infty \Rightarrow$

$\sum\limits_{j=0}^{\infty}(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx))$ auf $\mathbb{R}$.

$f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ riemann-integrierbar auf $[a,b]$ ($\forall j \in \mathbb{N}_0$) und $f_j \xrightarrow{(j\to\infty)} f$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$:

1. $\exists \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\lim_{j\to\infty} f_j(x)} dx = \lim_{j\to\infty}\int_a^b f_j(x)dx.$ $\quad (\Leftrightarrow f \in R([a,b]))$
2. $x_0 \in [a,b]$ fest: $F_j(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_j(t)dt$ Stammfunktion von f_j, $x \in [a,b] \Rightarrow F_j(x) \to F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$.

$$f_j \in R([a,b]), \sum_{j=0}^{\infty} f_j = f \text{ gleichmäßig konvergent} \quad \Rightarrow \quad f \in R([a,b]) \text{ und } \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right] dx = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\int_a^b f_j dx\right].$$

$f_j : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf (a,b), $f_j \xrightarrow{(j\to\infty)} f$ gleichmäßig konvergent auf (a,b), $f_j' \xrightarrow{(j\to\infty)} g$ gleichmäßig konvergent auf (a,b) $\Rightarrow$ f ist differenzierbar auf (a,b) und $f' = g$.

$f_j : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf (a,b), $\sum_{j=0}^{\infty} f_j = f$ gleichmäßig konvergent auf (a,b), $\sum_{j=0}^{\infty} f_j' = g$ gleichmäßig konvergent auf (a,b) $\Rightarrow$ f ist differenzierbar auf (a,b) und $f' = g$.

Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $x, x_0 \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$; diese ist <u>absolut konvergent</u> (nach Wurzelkriterium) falls:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}\,|x-x_0| < 1.$$

$$R = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} & \text{, falls } 0 < \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty \\ \infty & \text{, falls } \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \end{cases}$$ heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Es gilt:

- $|x-x_0| < R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist absolut konvergent.
- $|x-x_0| > R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist divergent.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist gleichmäßig konvergent auf jedem Intervall $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$.

Sei $R > 0$ Konvergenzradius, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ für $x \in I = (x_0 - R, x_0 + R)$, dann:

- f ist auf I beliebig oft differenzierbar: $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$, $j \in \mathbb{N}$.
  (absolute Konvergenz auf I, gleichmäßige Konvergenz auf $[a,b] \subset I$;
  insbesondere gilt: $f^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! \Leftrightarrow a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$.)
- Für alle $x \in I$ gilt: $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_k(t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$
  (absolute Konvergenz auf I, gleichmäßige Konvergenz auf $[a,b] \subset I$.)

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$
$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Fourierreihen

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = \begin{cases} 0 & , k \neq l \\ 2\pi & , k = l = 0 \\ \pi & , k = l \geq 1 \end{cases}$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx = \begin{cases} 0 & , k \neq l \\ \pi & , k = l = 1, 2, ... \end{cases}$ (3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx = 0 : \forall k, l \in \mathbb{N}_0$

Sei f stetig, 2π-periodisch und $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ gleichmäßig konvergent, dann:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$, $k \in \mathbb{N}_0$;
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$, $k \in \mathbb{N}$.

Dies kann man verallgemeinern: sei $f \in R([a,b])$, 2π-periodisch:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$, $k \in \mathbb{N}_0$;
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$, $k \in \mathbb{N}$.

heißen **Fourierkoeffizienten** von f.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \sim f$ heißt **Fourierreihe** (Fourierreihenentwicklung) von f.

$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,$||x|| = \left(x_1{}^2 + ... + x_n{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ heißt **euklidische Norm**.

"**Abstand**": $x, y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = ||x - y||$.

$\delta > 0 : x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) : K_\delta(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x^0|| < \delta\right\}$ ist offenen "Kugel" um x^0 mit Radius δ.

Skalarprodukt: $x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Es gilt: $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ und $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

$n = 2, 3 \Rightarrow \langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos(\alpha)$.

Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\, ||x|| - ||y||\, | \leq ||x \pm y|| \leq ||x|| + ||y||$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \leq ||x|| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \quad$ und $\quad \max\limits_{j=1,...,n} |x_j| \leq ||x|| \leq \sqrt{n} \max\limits_{j=1,...,n} |x_j|$.

$\left(x^j\right)_j$ Folge im $\mathbb{R}^n$, $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j)$, $j \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, dann gilt:

1. $\lim\limits_{j\to\infty} x^j = x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists j(\varepsilon) : \forall j > j(\varepsilon) : ||x^j - x|| < \varepsilon$; dann heißt $(x^j)_j$ **konvergent**.
2. $(x^j)_j$ heißt **Cauchy-Folge** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists j(\varepsilon) : \forall j, k > j(\varepsilon) : ||x^j - x^k|| < \varepsilon$.

Es gilt: $\lim\limits_{j\to\infty} x^j = x \Leftrightarrow \forall l = 1, ..., n : \lim\limits_{j\to\infty} x_l^j = x_l$ (jede Koordinate konvergent!).
$(x^j)_j$ ist konvergent $\Leftrightarrow (x^j)_j$ ist eine Cauchyfolge.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, dann heißt:

1. x^0 **innerer Punkt** von $M \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : K_\delta(x_0) \subset M$. $\overset{0}{M}$ ist die Menge aller inneren Punkte.
2. $y \in (\mathbb{R}^n \backslash M)$ **äußerer Punkt** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : K_\delta(y) \subset (\mathbb{R}^n \backslash M)$.
3. $x \in \mathbb{R}^n$ **Randpunkt** von $M \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists z \in (K_\delta(x) \cap M) \wedge \exists y \in (K_\delta(x) \cap (\mathbb{R}^n \backslash M))$.
   Die Menge aller Randpunkte heißt ∂M.
4. M **offen** $\Leftrightarrow M = \emptyset \vee \overset{0}{M} = M$.
5. M **abgeschlossen** $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \backslash M$ ist offen.
6. $\overline{M} = M \cup \partial M$ **Abschluss** von M.

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(x^j)_j$ aus M mit $\lim\limits_{j\to\infty} x^j = x \in \mathbb{R}^n$ ist $x \in M$.

$\overline{M}$ und ∂M sind abgeschlossene Mengen und $\partial M = \overline{M} \backslash \overset{0}{M}$.

Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.
Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
$\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} K_{\frac{1}{j}}(0) = \{0\}$ ist abgeschlossen. $\bigcup\limits_{0<\delta<1} \overline{K_\delta(0)} = K_1(0)$ offen.

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt** $\Leftrightarrow \exists r > 0 : \forall x \in M : ||x|| < r$.

Bolzano-Weierstraß: $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Rightarrow$ Jede Folge aus M besitzt eine konvergente Teilfolge.

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt** $\Leftrightarrow$ Jede Folge in M besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M.
$M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow M$ ist abgeschlossen und beschränkt.

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(m, n \in \mathbb{N})$:
$x^0 \in \overline{\Omega}, y^0 \in \mathbb{R}^m$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = y^0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||x - x^0|| < \delta : ||f(x) - y^0|| < \varepsilon.$
$x^0 \in \Omega$; dann heißt f **stetig** in $x^0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0).$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, \text{ wobei } f_k : \Omega \to \mathbb{R} : \forall k \in \{1, ..., m\} \text{ und } y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_m^0 \end{bmatrix}.$$

$\lim_{x \to x^0} f(x) = y^0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k = 1, ..., m : \lim_{x \to x^0} f_k(x) = y_k^0.$
f stetig in $x^0 \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \forall k = 1, ..., n$ ist f_k stetig in x^0.
$\lim_{x \to x^0} f(x) = y^0 \quad \Leftrightarrow$ <u>für alle</u> Folgen $(x^j)_j$ aus Ω mit $\lim_{j \to \infty} x^j = x^0$ gilt $\lim_{j \to \infty} f(x^j) = y^0$.

f, g stetig in x^0, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g$ stetig in x^0.

$$\left.\begin{array}{l} f : \Omega \to \mathbb{R}^m, \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ stetig in } x_0 \in \Omega, \\ \varphi : G \to \Omega, G \subset \mathbb{R}^p, p \in \mathbb{N}, \varphi(u^0) = x^0 \text{ und } \varphi \text{ stetig in } u^0 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ \varphi \text{ ist stetig in } u^0.$$

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig in $x^0 \Rightarrow f \cdot g$ stetig in x^0, $\frac{f}{g}$ stetig in x^0 $(g(x) \neq 0)$.
$g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig in x^0, $g(x^0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (K_\delta(x^0) \cap \Omega) : g(x) > 0.$
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig in $x^0 \Rightarrow ||f|| : \Omega \to \mathbb{R}$ ist stetig in x^0.

f heißt beschränkt $\Leftrightarrow f(\Omega) = \{f(x) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt. $\qquad f(\Omega)$ heißt **Bild** von Ω.

Satz von Minimum und Maximum: $K \subset \mathbb{R}^n$ sei <u>kompakt</u>;

1. $f : K \to \mathbb{R}^m$ sei stetig auf $K \Rightarrow f(K) \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.
2. $f : K \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $K \Rightarrow f$ ist beschränkt und $\exists u, v \in K : f(u) = \inf_{x \in K}(f(x))$ und $f(v) = \sup_{x \in K}(f(x))$.

Satz von gleichmäßiger Stetigkeit:
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig auf $K \Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig auf K
(d.h.: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in K : ||x - x'|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x')|| < \varepsilon$).

Stetigkeit der **Umkehrabbildung**:
Es sei $f : K \to \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, f stetig auf K und es existiere $f^{-1} : f(K) \to K \Rightarrow f^{-1}$ ist stetig auf $f(K)$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend** $\Leftrightarrow$ für alle Punkte $x, y \in \Omega$ existiert ein Weg in Ω, der x und y verbindet.
(d.h.: $\exists \Phi : [a, b] \to \Omega$ stetig auf $[a, b]$ mit $\Phi(a) = x$ und $\Phi(b) = y$).
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet** $\Leftrightarrow \Omega$ offen und zusammenhängend.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig auf Ω, $u, v \in \Omega$ und $y_0 \in \mathbb{R} : f(u) < y_0 < f(v) \Rightarrow \exists x^0 \in \Omega : f(x^0) = y_0$. (ZWS)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$:

1. $e^j = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{j-te Stelle}}, 0, ..., 0)$ heißt <u>Einheitsvektor</u> in x_j-Richtung $(j = 1, ..., n)$.
   $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te^j) - f(x)}{t}$ heißt **partielle Ableitung** von f nach x_j in $x \in \Omega$.
   (Schreibweisen: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_{x_j} f = \partial_j f = D_j f = f_{x_j}$....)
2. f heißt partiell differenzierbar in $x \in \Omega \Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., n\} : \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.
   Wir setzen $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), ..., \partial_n f(x))$ **Gradient** von f in $x \in \Omega$.
3. $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$, $||\nu|| = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + \nu t) - f(x)}{t}$ heißt Ableitung von f in <u>Richtung</u> ν im Punkt $x \in \Omega$.
   (Richtungsableitung)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **total differenzierbar**

$$\Leftrightarrow \exists a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x^0) + \underbrace{a(x - x^0)}_{\text{Skalarprodukt}} + R(x), \text{ wobei } \lim_{x \to x^0} \frac{R(x)}{||x - x^0||} = 0.$$

Außerdem gilt:

1. f total differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig in x^0.
2. f total differenzierbar $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) = (\nabla f)(x^0) \cdot \nu$. $\quad (||\nu|| = 1)$
3. f total differenzierbar $\Rightarrow a = \big(\nabla f)(x^0) = (\partial_1 f(x^0), ..., \partial_n f(x^0)\big)$.

f differenzierbar in x^0, dann gilt:

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$ ist maximal $\Leftrightarrow \nu = \frac{\nabla f(x^0)}{||\nabla f(x^0)||}$; $\qquad \frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$ ist minimal $\Leftrightarrow \nu = -\frac{\nabla f(x^0)}{||\nabla f(x^0)||}$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x^0 \in \Omega$; $\varphi : (a, b) \to \Omega$ mit $\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, $\varphi(t_0) = x^0$ mit φ_j differenzierbar in t_0 für $j = 1, ..., n$;

$$\Rightarrow \exists \tfrac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t_0)) \cdot \dot{\varphi}_j(t_0) = \nabla f(x^0) \cdot \dot{\varphi}_j(t_0). \qquad \textbf{(Kettenregel)}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen:

1. f stetig differenzierbar in $x^0 \Leftrightarrow$ 1.$\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ für $x \in K_\delta(x^0) \subset \Omega$ und $j = 1, ..., n$.
   2.$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig in x^0 für $j = 1, ..., n$.
2. $f \in C(\Omega) \Leftrightarrow f$ stetig auf Ω.
3. $f \in C^1(\Omega) \Leftrightarrow$ Für alle $j = 1, ..., n$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega)$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in $x^0 \Rightarrow f$ ist total differenzierbar in x^0.
Insbesondere ist dann f auch stetig in x^0.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (x_0, y_0):

1. Die Ebene, gegeben durch $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$, heißt **Tangentialebene** an den *Graph*$(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Der Vektor $n = \pm \dfrac{(-f_x, -f_y, 1)}{||(-f_x, -f_y, 1)||}(x_0, y_0)$ heißt **Normaleneinheitsvektor** an den *Graph*(f) in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

$n \perp$ Tangentialebene.

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in \Omega$:

1. $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, ..., n\} : \dfrac{\partial^m f}{\partial {x_j}^m}(x^0) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\dfrac{\partial^{m-1} f}{\partial {x_j}^{m-1}}\right](x^0)$ heißt Ableitung der Ordnung m von f in Richtung x_j.
2. $m \in \mathbb{N}, j_l \in \{1, ..., n\}, l = 1, ..., m : D_{(j_1, j_2, ..., j_m)} f(x^0) = [D_{j_m}(...(D_{j_2}(D_{j_1} f)))](x^0)$ heißt **gemischte** Ableitung der Ordnung m.
3. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in {\mathbb{N}_0}^n$, $|a| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$: $D^\alpha f(x^0) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}(x^0) = [{D_n}^{\alpha_n}(...({D_2}^{\alpha_2}({D_1}^{\alpha_1} f)))](x^0)$.

Satz von Schwarz:
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}, x^0 \in \Omega, j, k \in \{1, ..., n\}, j \neq k$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists D_j f \text{ und } \exists D_k f \text{ in } K_\delta(x^0) \subset \Omega; \\ \exists D_j(D_k f) \text{ in } K_\delta(x^0) \subset \Omega, \text{ stetig in } x^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists [D_k(D_j f)](x^0) = [D_j(D_k f)](x^0).$$

$m \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt m-mal stetig differenzierbar auf Ω ($f \in C^m(\Omega)$)
$\Leftrightarrow \exists$ sämtliche partielle Ableitungen der Ordnungen $\leq m$ und diese sind stetig auf Ω.

$C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \exists D^\alpha f \in C(\Omega) : \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}$ $\qquad$ Möglichkeiten der partiellen Ableitungen: $\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$.

Laplace-Operator: $\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$

$f \in C^1(\Omega), K_\delta(x^0) \subset \Omega$:

$\forall x \in K_\delta(x^0) : \exists \vartheta : 0 < \vartheta < 1 : f(x) = f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x^0 + \vartheta(x - x^0))(x_j - {x_j}^0) = f(x^0) + \nabla f(x^0 + \vartheta(x - x^0))(x - x^0).$

<u>**Taylor**</u>: $f \in C^{m+1}(\Omega), m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \exists K_\delta(x^0) : \forall x \in K_\delta(x^0) \subset \Omega :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le m} \frac{D^\alpha f(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha}_{=T_m f(x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = m+1} \frac{D^\alpha f(x^0 + \vartheta(x - x^0))}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha}_{=R_m(x)}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $(x - x^0)^\alpha = (x_1 - {x^0}_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - {x^0}_n)^{\alpha_n}$.

Insbesondere gilt dann: $T_m f(x^0) = f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha + ... + \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha.$

$f \in C^2(\Omega) \Rightarrow \exists K_\delta(x^0) : \forall x \in K_\delta(x^0) :$ mit $\lim_{x \to x^0} \frac{R(x)}{||x - x^0||^2} \to 0.$

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x^0)(x_j - {x^0}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_j \partial_k f(x^0)(x_j - {x^0}_j)(x_k - {x^0}_k) + R(x);$$

Mit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x^t = [x_1 \; ... \; x_n]$, $\nabla f = [\partial_1 f, ..., \partial_n f]$, **Hesse-Matrix** von f : $Hf = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_2 f & ... & \partial_1\partial_n f \\ \partial_2\partial_1 f & \partial_2\partial_2 f & ... & \partial_2\partial_n f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f & \partial_n\partial_2 f & ... & \partial_n\partial_n f \end{bmatrix}$:

$$f(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0)^t \, Hf(x^0) \, (x - x^0) + R(x).$$

$f \in C^2(\Omega) \Rightarrow Hf$ ist eine symmetrische $n \times n$-Matrix.
$q(x - x^0) = (x - x^0)^t \, Hf(x^0) \, (x - x^0)$ ist eine **quadratische Form**.

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen:
(1) f hat ein (isoliertes) **lokales Maximum** in $x^0 :\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in K_\delta(x^0) \backslash \{x^0\} : f(x) < f(x^0)$.
(2) f hat ein (isoliertes) **lokales Minimum** in $x^0 :\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in K_\delta(x^0) \backslash \{x^0\} : f(x) > f(x^0)$.

<u>Notwendige Bedingung</u>: $f \in C^1(\Omega)$ mit lokalem Extremum in $x^0 \in \Omega \Rightarrow \forall \nu, ||\nu|| = 1 :$ $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) = 0$;
also insbesondere $\nabla f(x^0) = 0$.

$A = [a_{jk}]$ relle, symmetrische $n \times n$-Matrix:

1. $q_A(y) = y^t A y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_j y_k$ heißt <u>quadratische Form</u>.
2. A bzw. q_A heißt **positiv definit** $\Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : y^t A y \ge c||y||^2$.
3. A bzw. q_A heißt **negativ definit** $\Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : y^t A y \le -c||y||^2$.
4. A bzw. q_A heißt **indefinit** $\Leftrightarrow \exists y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n : q_A(y^1) < 0, \;\; q_A(y^2) > 0$.

Es gilt: $y^t A y \ge c||y||^2 \;\; : \forall y \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y^t A y > 0 \;\; : \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$.

A symmetrisch $\Rightarrow \exists T \in O(n) : T^t A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$; wobei λ_j die <u>Eigenwerte</u> von A und die Spalten von T <u>Eigenvektoren</u> von A sind: $T = [v^1 \; v^2 \; ... \; v^n] \Rightarrow \quad A v^j = \lambda_j v^j \quad : \forall j = 1, ..., n$.

$z \in \mathbb{R}^n$, sei $y = Tz \Rightarrow \quad y^t A y = (z^t T^t) A (Tz) = z^t (T^t A T) z = z^t \Lambda z = \lambda_1 {z_1}^2 + ... + \lambda_n {z_n}^2 \quad > 0 \Leftrightarrow \forall j : j > 0.$

$f \in C^2(\Omega),\ x^0 \in \Omega$; dann gilt:

1. $Hf(x^0)$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $Hf(x^0)$ sind positiv.
2. $Hf(x^0)$ ist negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $Hf(x^0)$ sind negativ.
3. $Hf(x^0)$ ist indefinit $\Leftrightarrow$ es existieren positive und negative Eigenwerte.

A symmetrische Matrix, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\triangle_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{bmatrix}$, $\forall k = 1, ..., n$; dann gilt:

1. A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $\forall k = 1, ..., n : \triangle_k > 0$.
2. A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ $\forall k = 1, ..., n : (-1)^k \triangle_k > 0$ ($\Leftrightarrow -A$ ist positiv definit.)

Hinreichende Bedingung: $f \in C^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n, x^0 \in \Omega$ und $\nabla f(x^0) = 0$ ($\Leftrightarrow x^0$ "stationärer Punkt"):

1. $Hf(x^0)$ positiv definit $\Rightarrow f$ hat lokales **Minimum** in x^0,
2. $Hf(x^0)$ negativ definit $\Rightarrow f$ hat lokales **Maximum** in x^0,
3. $Hf(x^0)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat **kein** lokales Maximum oder Minimum in x^0 ("Sattelpunkt").

($\partial\Omega$ immer gesondert untersuchen!)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \Omega$, $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$, wobei $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ für $j = 1, ..., m$:

1. f heißt C^k-Abbildung auf Ω ($f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$) $:\Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., m\}$ ist $f_j \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.
2. f heißt C^∞-Abbildung auf Ω ($f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$) $:\Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., m\}$ ist $f_j \in C^k(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
3. $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $Df = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & ... & \partial_n f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \partial_2 f_m & ... & \partial_n f_m \end{bmatrix}$ heißt **Jacobi-Matrix** von f.

$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m), x^0 \in \Omega \Rightarrow \forall x \in K_\delta(x^0) :$ $\quad f(x) = f(x^0) + Df(x^0)\,(x - x^0) + R(x)$ $\quad$ mit $\lim\limits_{x \to x^0} \dfrac{||R(x)||}{||x - x^0||} = 0$.

Kettenregel:
$l, m, n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^1-Abbildung auf $K_{\delta_1}(x^0)$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ C^1-Abbildung auf $K_{\delta_2}(y^0)$ mit $y^0 = f(x^0)$
$\Rightarrow h = g \circ f$ ist C^1-Abbildung auf $K_{\delta_1}(x^0)$ und $Dh(x^0) = (Dg(y^0)) \cdot (Df(x^0))$.

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt:

1. $g : U \to V$ heißt C^k-**Diffeomorphismus** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a) & g : U \to V \text{ bijektiv;} \\ b) & g \text{ (auf U) }, g^{-1} \text{ (auf V) sind } C^k\text{-Abbildungen.} \end{cases}$
2. $g : U \to V$ heißt C^∞-Diffeomorphismus $\Leftrightarrow$ g ist C^k-Diffeomorphismus für alle k.

$g : U \to V$, $g \in C^1 \Rightarrow$ Die Jacobi-Matrix $Dg(x)$ ist **regulär** (die Inverse existiert) und $[Dg(x)]^{-1} = Dg^{-1}(g(x))$.
($\Rightarrow \forall x \in U : \det(Dg(x)) \neq 0$.)

Und $\det(Dg(x))$ heißt **Jacobi-Determinante** (oder Funktionaldeterminante) von g:

$$\det(Dg(x)) = \frac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \frac{\partial(g_1, ..., g_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}.$$

Lokale Umkehrbarkeit:

1. $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei eine C^1-Abbildung; $x^0 \in \Omega$ und $g(x^0) = y^0$. Außerdem gelte $\det(Dg(x^0)) \neq 0$. Dann existieren offene Mengen $U \subset \Omega$ ($x^0 \in U$) und $V \subset \mathbb{R}^n$ ($y^0 \in V$), so dass gilt:
   g ist Diffeomorphismus von U auf V.
   Für die Jacobi-Matrix von g^{-1} gilt: $(Dg^{-1})(y) = \left[Dg(g^{-1}(y))\right]^{-1}$ für $y \in V$.
2. Ist zusätzlich g eine C^k-Abbildung ($k > 1$), so ist g^{-1} auch eine C^k-Abbildung.

Seien $U, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus:

1. $u \in U$ heißt **Koordinatenvektor** von $x \in \Omega$ bezüglich $g :\Leftrightarrow x = g(u)$.
2. $x^0 = g(u^0)$, $\Phi^j(t) = g(u^0 + t \cdot e^j)$, $e^j = (0, ..., 0, \overbrace{1}^{j\text{-te Stelle}}, 0, ..., 0)$ mit $(u^0 + t \cdot e^j) \in U$:
   Der Weg (Kurve) Φ^j heißt ***j*-te Koordinatenlinie** durch x^0.

x^0 ist Schnittpunkt von n Koordinatenlinien.

Dabei ist die Jacobi-Matrix $Dg = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & ... & \partial_n g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\partial_1 g_n}_{\vec{b}_1} & \underbrace{\partial_2 g_n}_{\vec{b}_2} & ... & \underbrace{\partial_n g_n}_{\vec{b}_n} \end{bmatrix}$ mit den zu normierenden Basisvektoren ($\vec{e}^i = \dfrac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$).

Seien $U, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, $\Phi^j(t) = g(u^0 + t \cdot e^j)$ Koordinatenlinien durch $x^0 = g(u^0)$:

$\dot{\Phi}^j = \begin{bmatrix} \partial_j g_1(u^0) \\ \vdots \\ \partial_j g_n(u^0) \end{bmatrix} := \partial_j\, g(u^0)$ heißt **Tangentenvektor** an die j-te Koordinatenlinie in $x^0 = g(u^0)$ ($\forall j = 1, ..., n$).

Die krummlinigen Koordinaten $(u_1, ..., u_n)$ heißen **orthogonal**
$\Leftrightarrow \left\{\partial_1 g(u^0), ..., \partial_n g(u^0)\right\}$ bilden ein **Orthogonalsystem** im $\mathbb{R}^n$ für alle $u^0 \in U$.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld:

- $\vec{v}$ heißt **konservativ** (oder Gradientenfeld) $\Leftrightarrow \exists F \in C^1(\Omega) :\ \vec{v} = -grad(F)$ auf Ω.
- $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ein skalares Feld und heißt dann **Potential** von $\vec{v}$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, F, Φ seien Potentiale von $\vec{v}$ auf $\Omega \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \quad \Phi = F + c$.

Sei $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $\vec{v} = -\text{grad}(F)$; dann gilt: $\dfrac{\partial v_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \forall j, k = 1, ..., n$ ($\Leftrightarrow D\vec{v}$ ist symmetrisch).

Sei $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld, dann: $\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ $(= \vec{\nabla} \times \vec{v})$ heißt **Rotation**.

$\vec{v}$ konservativ $\Leftrightarrow \text{rot}(\vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \vec{v}$ ist **wirbelfrei**. Sonst heißt $\vec{v}$ **Wirbelfeld**.

$\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld, dann: $\quad \text{div}(\vec{v}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$ $\quad (= \vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ heißt **Divergenz**.

Es gilt $\text{div}(\vec{v}) = tr(D\vec{v})$ ist Spur der Jacobi-Matrix von $\vec{v}$; $\quad \text{div}(\vec{r}) = n$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ einem Ortsvektor.

$u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$, dann: $\quad \triangle u = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}$ heißt **Laplace-Operator**.

($\triangle u = 0 \Leftrightarrow u$ **harmonisch**.)

$$\boxed{\begin{array}{l} \triangle(f\,g) = g\ \triangle f + 2\operatorname{grad}(f)\operatorname{grad}(g) + f\ \triangle g \\ \operatorname{rot}(f\operatorname{grad}(g)) = \operatorname{grad}(f) \times \operatorname{grad}(g) \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f) \times \operatorname{grad}(g)) = 0 \end{array}}$$

<u>in krummlinigen Orthogonalkoordinaten:</u>

$g : U \to \Omega$ Diffeomorphismus ($U, \Omega \subset \mathbb{R}^3$), $g = \begin{pmatrix} g_1(u,v,w) \\ g_2(u,v,w) \\ g_3(u,v,w) \end{pmatrix}$ orthogonale Koordinaten;

Jacobi-Matrix $Dg = \begin{bmatrix} \partial_u g & \partial_v g & \partial_w g \end{bmatrix}$;

Koordinateneinheitsvektoren: $\vec{e}_u = \dfrac{1}{||g_u||}\partial_u g$, $\vec{e}_v = \dfrac{1}{||g_v||}\partial_v g$, $\vec{e}_w = \dfrac{1}{||g_w||}\partial_w g$; $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ ist Orthonormalsystem;

Seien $h_u = ||g_u||$, $h_v = ||g_v||$ und $h_w = ||g_w||$; $F = F(u,v,w)$ und $\vec{A} = A_1\vec{e}_u + A_2\vec{e}_v + A_3\vec{e}_w$ mit $A_i = A_i(u,v,w)$:

- $\operatorname{grad}(F) = \dfrac{1}{h_u}\,\partial_u F\,\vec{e}_u + \dfrac{1}{h_v}\,\partial_v F\,\vec{e}_v + \dfrac{1}{h_w}\,\partial_w F\,\vec{e}_w$,
- $\operatorname{div}(\vec{A}) = \dfrac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\,[\partial_u(A_1\,h_v\,h_w) + \partial_v(A_2\,h_u\,h_w) + \partial_w(A_3\,h_u\,h_v)]$,
- $\operatorname{rot}(\vec{A}) = \dfrac{1}{h_u\,h_v\,h_w} \cdot \det \begin{pmatrix} h_u\,\vec{e}_u & h_v\,\vec{e}_v & h_w\,\vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u\,A_1 & h_v\,A_2 & h_w\,A_3 \end{pmatrix}$,
- $\triangle F = \dfrac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\left[\partial_u\left(\dfrac{h_v\,h_w}{h_u}\partial_u F\right) + \partial_v\left(\dfrac{h_u\,h_w}{h_v}\partial_v F\right) + \partial_w\left(\dfrac{h_u\,h_v}{h_w}\partial_w F\right)\right]$.

Auflösungssätze:

($m = 1, n = 1$)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\Omega)$, $F(x_0, y_0) = 0$ für $(x_0, y_0) \in \Omega$ und $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$; dann:
$\exists U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ und $\exists V = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ mit $U \times V \subseteq \Omega$ und $\exists f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, eindeutig bestimmt, so dass $(x,y) \in U \times V \ \wedge\ F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge\ y = f(x)$.

<u>Gegeben</u> sei $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^1(\Omega)$, $F(x,y) = 0$.
<u>Gesucht</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $(x^0, y^0) \in (U \times V) \subseteq \Omega$ und $f : U \to V$, $f \in C^1(U)$ und eindeutig bestimmt, so dass $F(x, f(x)) = 0 : \forall x \in U$.

notwendige Bedingung: $\frac{dF}{dy}(x, f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x,y) \end{bmatrix}$ muss regulär sein (invertierbar); also insbesondere $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\right) \neq 0$.

Sei nun $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\right) \neq 0$; dann existieren <u>offene</u> Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $(x^0, y^0) \in U \times V \subset \Omega$, so dass:

1. $\forall x \in U : \exists$ genau ein $y = f(x) \in V$ mit $F(x, f(x)) = 0$.
2. Die so definierte Abbildung $f : U \to V$ ist eine C^1-Abbildung, deren Jacobi-Matrix sich als Lösung des LGS
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$
berechnen lässt.
3. Ist F eine C^k-Abbildung ($k = 2, 3, \ldots$), so ist auch f eine C^k-Abbildung.

$(n = m = 1)$ $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $F \in C^1(\Omega)$, $(x_0, y_0) \in \Omega : \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ und $F(x_0, y_0) = c$, $c \in \mathbb{R}$, dann:

- Durch $\{(x, y) : F(x, y) = c\}$ wird lokal (in Umgebung von x_0) eine Kurve (der Graph von $y = f(x)$) definiert.
- Der Gradient von F in (x, y) steht senkrecht auf der Tangente an den Graph von f in x $(y = f(x))$.

$(n = 2,\ m = 1)$ $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(\Omega)$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega : \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ und $F(x_0, y_0, z_0) = c$, $c \in \mathbb{R}$, dann:

- Durch $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = c\}$ wird lokal (in Umgebung von (x_0, y_0)) eine Fläche (der Graph von $z = f(x, y)$) definiert.
- Der Gradient von F in (x, y, z) steht senkrecht auf der Tangentialebene an den Graph von f in (x, y) $(z = f(x, y))$.

$F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Ω offen) mit $(x_0, y_0) \in \Omega : G(x_0, y_0) = 0$ und $\text{grad}(G)(x_0, y_0) \neq 0$. F habe in (x_0, y_0) ein Extremum unter der Nebenbedingung $G(x, y) = 0$; dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$, **Lagrange-Multiplikator**), so dass:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0). \qquad \textbf{(*)}$$

Nun sei $L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda\, G(x, y)$ (**Lagrange-Funktion**), dann gilt:

$$(G(x_0, y_0) = 0 \wedge \exists \lambda_0 \text{ mit } \textbf{(*)}) \Leftrightarrow \nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{pmatrix}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

Zielfunktion $F(x)$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (d.h.: $x \in \mathbb{R}^n$); **Nebenbedingung** $G(x) = 0$, wobei $G : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ (d.h.: $\lambda \in \mathbb{R}^k$); $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda\, G(x) = F(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j(x)$. Sei nun $x^0 \in \Omega$, $rk(DG(x^0)) = k$ (der Rang der Jacobi-Matrix) und F habe ein Extremum in x^0 unter der Nebenbedingung $G(x) = 0$; dann gilt:

$$\exists \lambda^0 \in \mathbb{R}^k\ (\lambda^0 \neq 0) : \quad \nabla L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

geometr. Mit. $\leq$ arithmet. Mit.

(Γ, Φ) glatte Kurve, $\Gamma \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet:

1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig ("skalares Feld"), $\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\Phi(t))||\dot{\Phi}(t)||dt$ heißt **skalares Kurvenintegral** (Kurvenintegral 1. Art).
   $ds = ||\dot{\Phi}(t)||dt$ ist Linienelement (Bogenelement).
2. $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld, $\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x} = \int_a^b \vec{v}(\Phi(t))\dot{\Phi}(t)dt$ heißt vektorielles Kurvenintegral von $\vec{v}$ längs Γ (Kurvenintegral 2. Art).
3. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_N$ stückweise glatt, $f, \vec{v}$ wie oben, dann: $\int_\Gamma f ds = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} f ds$, $\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x} = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \vec{v} d\vec{x}$.

Die Integrale sind unabhängig von der Auswahl der (zulässigen) Parameterdarstellung!

Seien Γ und $-\Gamma$ die gleiche Kurve, nur entgegengesetzt orientiert: $\int_{-\Gamma} f ds = \int_\Gamma f ds$, $\int_{-\Gamma} \vec{v} d\vec{x} = -\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x}$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld:

- $\vec{v}$ konservativ ($\vec{v} = -\text{grad}(u)$ mit $u \in C^1(\Omega)$), $x^0, x^1 \in \Omega$; dann gilt für jede stückweise glatte Kurve Γ in Ω von x^0 nach x^1: $\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x} = u(x^0) - u(x^1)$ (Potentialdifferenz).
  Insbesondere ist dann $\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x} = 0$ (Γ stückweise glatt und geschlossen) wegunabhängig!
- $\vec{v}$ stetiges Vektorfeld; für jede stückweise glatte geschlossene Kurve Γ auf Ω sei $\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{v}$ ist konservativ.

$\vec{v} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **Gebiet**; dann gilt: $\vec{v}$ konservativ auf $\Omega \;\Rightarrow\; \forall j, k = 1, ..., n : \; \partial_j v_k = \partial_k v_j$.

$\vec{v} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **sternförmiges Gebiet** (d.h.: $\exists x^0 \in \Omega : \forall x \in \Omega : x^0 + t(x - x^0) \in \Omega : \forall t : 0 \le t \le 1$); dann gilt:

$$\vec{v} \text{ konservativ auf } \Omega \;\Leftrightarrow\; \forall j, k = 1, ..., n : \; \partial_j v_k = \partial_k v_j.$$

Dies gilt auch, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

$Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ **n-dimensionales Rechteck**, $f : Q \to \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\mu(Q) = \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$ **Volumen** von Q und $Q_k := I^{(1)}_{k_1} \times ... \times I^{(n)}_{k_n}$ mit $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ und $k_j = 1, ..., N_j$ ($j = 1, ..., n$), wobei $\left(I^{(j)}_{k_j}\right)_{k_j = 1, ..., N_j}$ **Zerlegung** von $[a_j, b_j]$.

$Z \sim (Q_k)_k$ **Zerlegung** von Q, $Z = \{Q_k : k_j = 1, ..., N_j; j = 1, ..., n\}$, $m_k(f) = \inf_{Q_k}(f)$, $M_k(f) = \sup_{Q_k}(f)$, **Untersumme**: $\underline{S}(f, Z) = \sum_k m_k(f)\mu(Q_k)$, **Obersumme**: $\overline{S}(f, Z) = \sum_k M_k(f)\mu(Q_k)$.

$Z' = \{Q'_L : L = 1, ..., L_j; j = 1, ..., n\}$ ist **Verfeinerung** von $Z = (Q_k)_k \;\Leftrightarrow\; \forall Q'_L \subset Z' : \exists Q_k \subset Z$ mit $Q'_L \supset Q_k$.

$d(Z) = \max_{Q_k \in Z}(\text{diam}(Q_k)) = \max_{Q_k \in Z}\left[\sup_{x, y \in Q_k} ||x - y||\right]$ heißt **Feinheit** der Zerlegung (diam $\hat{=}$ Durchmesser).

- Z Zerlegung, $m = \inf_Q(f)$, $M = \sup_Q(f) \Rightarrow \mu(Q) \cdot m \le \underline{S}(f, Z) \le \overline{S}(f, Z) \le M \cdot \mu(Q)$.
- Z' Verfeinerung von $Z \Rightarrow \underline{S}(f, Z) \le \underline{S}(f, Z') \le \overline{S}(f, Z') \le \overline{S}(f, Z)$.
- Z, Z^* Zerlegungen $\Rightarrow \underline{S}(f, Z) \le \overline{S}(f, Z^*)$.
- $\exists \sup_Z(\underline{S}(f, Z)) \wedge \exists \inf_Z(\overline{S}(f, Z))$ und $\sup_Z(\underline{S}(f, Z)) \le \inf_Z(\overline{S}(f, Z))$.
- **Unterintegral**: $\underline{\int}_Q f dx := \sup_Z(\underline{S}(f, Z))$
  Oberintegral: $\overline{\int}_Q f dx := \inf_Z(\overline{S}(f, Z))$
- f ist "**Riemann-integrierbar**":
  - $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists$ Zerlegung Z_ε von Q, so dass $\overline{S}(f, Z_\varepsilon) - \underline{S}(f, Z_\varepsilon) < \varepsilon$.
  - $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall$ Zerlegungen Z von Q mit $d(Z) < \delta(\varepsilon)$ gilt: $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.

Daher: $f \in C(Q) \;\Rightarrow\; f \in R(Q)$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$ n-dimensionales Rechteck)

(Allgemeiner: Sei die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Lebesgue'sche Nullmenge (im $\mathbb{R}^n$), so gilt $f \in R(Q)$.)

- Linearität: $f, g \in R(Q)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in R(Q)$ und $\int_Q (\lambda f + \mu g)\, dx = \lambda \int_Q f dx + \mu \int_Q g dx$.
- $f, g \in R(Q)$, $f \leq g$ auf $Q \Rightarrow \int_Q f dx \leq \int_Q g dx$.
- $f \in R(Q) \Rightarrow |f| \in R(Q)$ und $|\int_Q f dx| \leq \int_Q |f| dx$.
- $Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$, $\overset{0}{Q}_j \cap Q_l = \emptyset : \forall j \neq l$, dann gilt: $f \in R(Q) \Leftrightarrow f \in R(Q_j) : \forall j = 1, ..., N$ und $\int_Q f dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j} f dx$.
- $f \in C(Q)$ und $\int_Q |f| dx = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$ auf Q.

Mittelwertsatz der Integralrechnung: $f \in C(Q) \Rightarrow \exists \xi \in \overset{0}{Q}$: $f(\xi) = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) dx$.

Der Satz von Fubini
Sei $Q = A \times B$, A k-dimensionales Rechteck, B l-dimensionales Rechteck, $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar; dann gilt:

1. für jedes $x \in A$ existiere $\int_B f(x, y) dy$; dann existiert $\displaystyle\int_A \left(\int_B f(x, y)\, dy \right) dx = \int_Q f(x, y)\, d(x, y)$;
2. für jedes $y \in B$ existiere $\int_A f(x, y) dx$; dann existiert $\displaystyle\int_B \left(\int_A f(x, y)\, dx \right) dy = \int_Q f(x, y)\, d(x, y)$.

Also: f stetig auf $Q = A \times B \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_B \left(\int_A f dx \right) dy = \int_A \left(\int_B f dy \right) dx = \int_Q f d(x, y)$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, Q n-dimensionales Rechteck mit $\Omega \subset \overset{0}{Q}$, f beschränkt; dann:
$\int_\Omega f dx = \int_Q f\, \chi_\Omega\, dx$, wobei $\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & , x \in \Omega \\ 0 & , x \notin \Omega \end{cases}$ ("charakteristische Funktion").
Existiert das Integral, so schreiben wir: $f \in R(\Omega)$.

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan'sche Nullmenge** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists$ endlich viele abgeschlossene n-dimensionale Rechtecke
$$Q_1, ..., Q_N \text{ mit } M \in \bigcup_{j=1}^{N} \overset{0}{Q}_j \text{ und } \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j) < \varepsilon.$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\Omega \subset \overset{0}{Q}$ (Q n-dimensionales Rechteck) und $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash Q$; dann:

1. f ist fast überall stetig auf Q (d.h.: $\{x \in Q : f$ unstetig in $x\}$ ist Jordansche Nullmenge).
2. $\partial\Omega$ Jordansche Nullmenge $\Rightarrow f \in R(\Omega)$.

$M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan'sche Nullmenge ($M \subset \overset{0}{Q}$) $\Rightarrow \exists \int_M 1 dx = \int_Q \chi_M dx = 0$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-messbar** $\Leftrightarrow \Omega$ beschränkt und $\partial\Omega$ Jordan'sche Nullmenge.
Ω Jordan-messbar, $\mu(Q) = \int_\Omega 1 dx = \int_Q \chi_\Omega dx$ heißt **Volumen** von Ω (**Jordan'sches Maß**).

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. $f \in R(\Omega) \Rightarrow \exists \int_{\overset{0}{\Omega}} f dx = \int_\Omega f dx = \int_{\overline{\Omega}} f dx$.
2. $f = g$ fast überall auf $\Omega \quad\Rightarrow\quad f \in R(\Omega) \Leftrightarrow g \in R(\Omega)$ und $\int_\Omega f dx = \int_\Omega g dx$.

$\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig auf $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$, K kompakt
$\Rightarrow S := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = \varphi(x_1, ..., x_{n-1}), x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in K\}$ ist Jordan'sche Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ mit $c, d : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Normalbereich** im $\mathbb{R}^2$.
$\partial B = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (mit Γ_i einem Randkurvenstück) ist <u>Jordansche Nullmenge</u>.

$f : B \to \mathbb{R}$ stetig, $B \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich $\Rightarrow B$ ist <u>Jordan-messbar</u> und $\exists \int_B f d(x,y) = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy\right] dx.$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$ (mit $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ stetig) heißt **Normalbereich** im $\mathbb{R}^3$.
$f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^3$ <u>Normalbereich</u> $\Rightarrow G$ <u>Jordan-messbar</u> und $\exists \int_G f d(x,y,z) = \int_B \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right] d(x,y).$

<u>**Transformationsformel**</u>:
$A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Jordan-messbar; $g : A \to B$ stetig diff'bar, surjektiv und g injektiv auf $A \backslash N$, wobei N Jordan'sche Nullmenge ist; außerdem $\frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(u_1,...,u_n)} \neq 0$ auf $A \backslash N$. Ferner sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\int_B f(x)dx = \int_A f(g(u)) \left|\frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(u_1,...,u_n)}\right| du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
$$\int_{||x|| \leq 1} ||x||^{-\alpha} d(x_1,x_2,x_3) < \infty \Leftrightarrow \alpha < 3$$
$$\int_{||x|| \geq 1} ||x||^{-\alpha} d(x_1,x_2,x_3) < \infty \Leftrightarrow \alpha > 3$$

Flächen im $\mathbb{R}^3$:
$G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $g : G \to \mathbb{R}^3$ C^1-Abbildung, injektiv mit

$$rk(Dg) = rk \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{bmatrix} = 2 \text{ für alle } (u,v) \in G.$$

$S = g(G)$ heißt **orientierte Fläche** im $\mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung g.
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $h : U \to \mathbb{R}^3$ C^1-Abbildung heißt **zulässige Parameterdarstellung** von (S, g)
$\Leftrightarrow \exists$ bijektive Abbildung $\mu : U \to G$ mit $\det(D\mu) = \frac{\partial(\mu_1,\mu_2)}{\partial(s,t)} > 0$ auf U, so dass $h(s,t) = g(\mu(s,t))$ auf U.

Wir setzen $\vec{g}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} \end{bmatrix}$ und $\vec{g}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{bmatrix}$; $\vec{n}(u_0,v_0) = \frac{\vec{g}_u \times \vec{g}_v}{||\vec{g}_u \times \vec{g}_v||}(u_0,v_0)$ heißt **Normaleneinheitsvektor** an S im Punkt $g(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

Die durch $[(\vec{g}_u \times \vec{g}_v)(u_0,v_0)] \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$ aufgespannte Ebene, heißt **Tangentialebene** an S in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

Definition von $\vec{n}$ und der Tangentialebene sind <u>unabhängig</u> von der zulässigen Parameterdarstellung.

Jetzt: betrachten <u>kompakte</u> Fläche:
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Abbildung, $B \subset \Omega$ Jordan-messbar, kompakt; $S = g(B) = \{g(u,v) : (u,v) \in B\}$.

kompakte Fläche: $\exists$ Jordan'sche Nullmenge $N \subset B$, so dass g injetkiv auf $B \backslash N$, $rk(Dg) = rk(\vec{g}_u\ \vec{g}_v) = 2$ auf $B \backslash N$.

$h : A \to \mathbb{R}^2$ mit $S = h(A)$ heißt <u>zulässige Parameterdarstellung</u> ($A \subset \tilde{\Omega}$, Jordan-messbar, kompakt)
$\Leftrightarrow \exists \mu : A \to B \in C^1$, $\frac{\partial(\mu_1,\mu_2)}{\partial(s,t)} > 0$, so dass $h(s,t) = g(\mu(s,t))$ auf A.

$\omega(S) = \int_B ||\vec{g}_u \times \vec{g}_v|| d(u,v)$ heißt **Flächeninhalt** von S; $d\omega = ||\vec{g}_u \times \vec{g}_v|| d(u,v)$ heißt **Oberflächenelement**.

$\omega(S)$ ist <u>unabhängig</u> von der zulässigen Parameterdarstellung.

Gauß'sche Fundamentalgrößen von S: $E = \vec{g}_u\vec{g}_u$, $F = \vec{g}_u\vec{g}_v$, $G = \vec{g}_v\vec{g}_v$.

Es ist $||\vec{g}_u \times \vec{g}_v|| = \sqrt{\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \sqrt{EG - F^2}$.

Sei nun $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in B\} = \text{graph}(f)$ mit $f \in C^1(B)$

$\Rightarrow \omega(S) = \int_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}d(x, y)$ ist Flächeninhalt von S.

Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$:

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, (S, g) kompakte Fläche, $S \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetiges Vektorfeld:

- $\displaystyle\int_S f d\omega := \int_B f(g(u, v)) \,||\, \vec{g}_u \times \vec{g}_v \,||\, d(u, v)$ heißt **Oberflächenintegral 1. Art**;
- $\displaystyle\int_S \vec{v} d\vec{\omega} := \int_B \vec{v}(g(u, v)) \cdot (\vec{g}_u \times \vec{g}_v)d(u, v)$ heißt **Oberflächenintegral 2. Art** (oder Fluss von $\vec{v}$ durch S).

Es gilt: $\displaystyle\int_S \vec{v} d\vec{\omega} = \int_B \det(\begin{bmatrix} \vec{v} & \vec{g}_u & \vec{g}_v \end{bmatrix})d(u, v) = \int_B \vec{v}\vec{n} d\omega$, mit $\vec{n} = \dfrac{\vec{g}_u \times \vec{g}_v}{||\vec{g}_u \times \vec{g}_v||}$ Normaleneinheitsvektor.

Der Satz von **Gauß-Ostrogradski**: $\displaystyle\int_\Omega \text{div}(\vec{v})d(x, y, z) = \oint_{\partial\Omega} \vec{v}\vec{n} d\omega.$

Flächenintegrale im $\mathbb{R}^n$:

Sei $2 \leq m < n$, $\quad g : G \to \mathbb{R}^n$ C^1-Abbildung, $rk(Dg) = m$ fast überall, G offen in $\mathbb{R}^m$ und $B \subset G$ kompakte Jordan-messbare Menge. Außerdem $S = g(B)$, dann heißt (S, g) **eine m-Fläche im $\mathbb{R}^n$**.
Analog zum 3-dimensionalen:

$g(\underbrace{n_1, ..., n_m}_{u}) = \begin{bmatrix} g_1(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{bmatrix}$; $\quad \vec{g}_{u_i} = \partial_{u_i} g = \begin{bmatrix} \partial_{u_i} g_1 \\ \vdots \\ \partial_{u_i} g_n \end{bmatrix}$ $\quad \forall i = 1, ..., m$; $\quad g_{ik} = \vec{g}_{u_i}\vec{g}_{u_k} \quad \forall i, k = 1, ..., m$; der Matrix (g_{ik}).

Das **Oberflächenelement** sei dann: $d\omega = \sqrt{\det(g_{ik})}du$.

Mit $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $S \subset \Omega$ heißt:

$$\int_S F d\omega = \int_B F(g(u))\sqrt{\det(g_{ik})}du \quad \textbf{Flächenintegral auf der } m\textbf{-Fläche } S.$$