f'(x)	f(x)	F(x)
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$-\left(1+\cot^2(x)\right) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\lvert 1+x^2\rvert$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$x\cdot\operatorname{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln\lvert 1+x^2\rvert$

<u>Green'scher Satz</u>: $\Phi(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, geschlossener Weg, 2-dimensional.

$$\oint_C \vec{\Phi}d\vec{r} = \oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Zirkulation von $\vec{v}$ bezüglich einer Kurve C, an der $d\vec{r} = \vec{t}ds$ gilt ($\vec{t}$ = Tangenteneinheitsvektor):

$$\oint \vec{v}d\vec{r} = \oint \vec{v}\vec{t}ds.$$

Nach Green gilt ($\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, C eine geschlossene Kurve, G die eingeschlossenen Fläche): $\oint_C \vec{v}\vec{t}ds = \iint_G \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)dxdy.$

<u>Stoke'scher Satz</u>:
Seien $S: z = z(x,y)$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ die geschlossene Oberfläche über einer Randkurve C_S, $d\vec{f}$ der jeweilige Tangentialflächennormalenvektor und $\vec{\Phi} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ein Vektorfeld, dann gilt:

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{\Phi})d\vec{f} = \oint_{C_S} \vec{\Phi}d\vec{r}.$$

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ und $\operatorname{rot}(\vec{\Phi}) = \vec{\nabla}\times\vec{\Phi} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$

Sei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf eine infinitesimale Fläche A_ε: $\vec{n}\operatorname{rot}(\vec{\Phi}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{A_\varepsilon}\oint_C \vec{\Phi}d\vec{r}.$
(Rotation = Zirkulation pro Fläche)

Fluß von $\vec{v}$ bezüglich einer Kurve C, an der $d\vec{r} = \vec{t}ds$ gilt ($\vec{t}$ = Tangenteneinheitsvektor, $\vec{n}$ = Normaleneinheitsvektor; $\vec{t}\perp\vec{n}$):

$$\oint \vec{v}\vec{n}ds.$$

Nach Green gilt ($\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, C eine geschlossene Kurve, G die eingeschlossene Fläche): $\oint_C \vec{v}\vec{n}ds = \iint_G \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right)dxdy.$

Sei U ein <u>skalares</u> Feld: $\operatorname{grad}(U) = \vec{\nabla}\cdot U = \frac{\partial}{\partial x}U\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}U\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}U\vec{k}$

und sei $\vec{\Phi} = \begin{pmatrix}\Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z\end{pmatrix}$ ein <u>Vektor</u>feld: $\operatorname{div}(\vec{\Phi}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_x + \frac{\partial}{\partial y}\Phi_y + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_z.$

<u>Gauß'scher Satz</u>:
Sei A die geschlossene Oberfläche über ein Volumen V, $d\vec{f}$ der jeweilige Tangentialflächennormalenvektor und $\vec{\Phi} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ein Vektorfeld, dann gilt:

$$\oiint_A \vec{\Phi}d\vec{f} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\Phi})dV.$$

$\operatorname{div}(\vec{v}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V_\varepsilon}\oiint_{S_\varepsilon}\vec{v}d\vec{f}$ (Divergenz = Fluß pro Volumen)

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(U)) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U = \vec{0}$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{\Phi})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{\Phi}) = 0$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$
$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial x_i}\vec{e}_i,$$
$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$
$$\text{rot}(\vec{a}) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\vec{e}_i.$$
$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_i}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \partial_{jl}\partial_{km} - \partial_{jm}\partial_{kl}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

Laplace-Operator: $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Green'sche Identitäten

1. $\oiint_S \lambda \text{grad}(U) d\vec{f} = \iiint_V (\lambda \triangle U + \text{grad}(U)\text{grad}(\lambda))dV$

2. $\oiint_S (U\text{grad}(\lambda) - \lambda\text{grad}(U))d\vec{f} = \iiint_V (U \triangle \lambda - \lambda \triangle U)dV$

Kronecker-Symbol: $\partial_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$

Levi-Civita-Symbol: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} (-1)^N & \text{, alle Indizes verschieden} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

(N = Anzahl der Inversionen der Reihenfolge 1 – 2 – 3; Inversion - größere Zahl steht vor kleinerer.)

Linienelement (metrische Fundamentalform): $ds^2 = g_{mn}dx^m dx^n$;

Jacobi-Matrix: $(g_{mn}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x^1, x^2, ..., x^m)}{\partial(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^m}{\partial x^{2'}} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial x^{n'}} \end{pmatrix}$;

Jacobi-Determinante: $\sqrt{\det(g_{mn})}$ (für $m = n$).

Wurzeln der Hauptidagonalenelemente von (g_{mn}): $g_i = \sqrt{g_{ii}}$.

$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$; Koordinaten u^1, u^2, u^3; <u>**Basisvektoren**</u>:

1) Tangentenvektoren an Koordinatenlinien $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$ **kovariante** Basis
2) Normalenvektoren von Koordinatenflächen $\vec{u}_i = \text{const.}$; $\vec{e}^{\,i} = \text{grad}(u^i)$ **kontravariante** Basis

} **reziprokes System**

(reziprokes System ⇔ orthogonale ko- und kontravariante Basisvektoren)

Die ko- und kontravarianten <u>Einheits</u>basisvektoren <u>orthogonaler</u> Systeme sind gleich.

Volumenelement: $dV = \sqrt{\det(g_{mn})}\, du^1\, du^2\, du^3$.

$\vec{a}\,\vec{b} = g_{mn}\, a^m\, b^n = g^{mn}\, a_m\, b_n = a^m\, b_m = a_m\, b^m$, wobei $g_{mn} = \vec{e}_m\, \vec{e}_n$ bzw. $g^{mn} = \vec{e}^{\,m}\, \vec{e}^{\,n}$.
$a^m = g^{mn}\, a_n$, $a_m = g_{mn} a^n$ und $g^{mn}\, g_{no} = \delta^m_o$.

Christoffel-Symbole: $\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial u^n} = \Gamma^o_{mn}\vec{e}_o$ (mit o - Summe, m - welche Komponente, n - nach welcher Basiskomponente), wobei $\Gamma^o_{mn} = \Gamma^o_{nm}$.

$$\Gamma^o_{mn} = \tfrac{1}{2} g^{po}\left(\frac{\partial g_{np}}{\partial u^m} + \frac{\partial g_{pm}}{\partial u^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial u^p}\right)$$

<u>Gauß'sche Integrale:</u> $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\beta x^2} dx$, $\beta > 0$, $n > -1$.

Es gilt folgende Rekursionsformel: $I_{n+2} = \frac{dI_n}{d\beta}$ und $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, $I_1 = \frac{1}{2\beta}$.

Dirac'sche Delta-Funktion: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0) & , x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$.

$\int_{x_1}^{x_2} \delta[g(x)]dx = \frac{1}{|g'(x)|}$ (für g mit einer Nullstelle), $\delta[g(x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(x - x_{0k})}{|g'(x_{0k})|}$ (für g mit n Nullstellen).

($\delta(a\,x) = \frac{\delta(x)}{|a|} \to$ Dimensionsbehaftung)

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\delta_n(x)dx = 0,$ $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ und $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta'(x)dx = \begin{cases} -f'(0) & , x_1 < 0 < x_2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$.

Heaviside'sche Sprungfunktion: $\Theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 1 & , 0 < x \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ (wobei definiert: $\Theta(0) = \frac{1}{2}$).

<u>mehrdimensionale δ-Funktion</u>:
zur Beschreibung einer Volumendichte: $\mu = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{mn})}}\delta(x^1 - x_0^1)\,\delta(x^2 - x_0^2)\,\delta(x^3 - x_0^3)$.
Von Flächendichte zu Volumendichte: $\iint \sigma df \overset{!}{=} \iiint \mu dV$.
Von Liniendichte zu Volumendichte: $\int \lambda ds \overset{!}{=} \iiint \mu dV$.

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

Fourierreihe von f: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right]$; mit $L = b - a$ dem Periodizitätsintervall.

Dirichlet'sche Bedingungen:
1. $f(x)$ periodisch ($\Rightarrow f(x + L) = f(x)$);
2. $f(x)$ eindeutig, stetig (außer an endlich vielen Unstetigkeitsstellen);
3. $f(x)$ hat endlich viele Extremwerte in L;
4. $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert.

(1) $\int_a^b \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ L & , n = m = 0 \\ \frac{L}{2} & , n = m \geq 1 \end{cases}$ (2) $\int_a^b \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ 0 & , n = m = 0 \\ \frac{L}{2} & , n = m \geq 1 \end{cases}$

(3) $\int_a^b \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx = 0 \quad , \forall n, m \in \mathbb{N}_0$

Dann ergibt sich:

- $a_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx,\ n \in \mathbb{N}_0;$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx,\ n \in \mathbb{N}.$

Wegen der Periodizität gilt: $\int_a^b F(x)dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F(x)dx$; mit $\xi = \frac{2\pi}{L}x$ gilt also: $\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{L}{2\pi}\xi)\cos(n\xi)d\xi \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{L}{2\pi}\xi)\sin(n\xi)d\xi \end{array}$.

Komplex dargestellt: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ mit $A_n = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}dx.$

Die Fourier-Reihe einer <u>stückweise glatten</u> Funktion mit konstanter, beschränkter Periode <u>konvergiert</u> für alle x gegen diese selbst;
an den <u>Unstetigkeitsstellen</u> ist sie gleich dem <u>arithmetischen Mittel</u> aus links- und rechtsseitigem Grenzwert.

Es gilt:
- die Anzahl der Extrema wächst mit dem Grad des Polynoms,
- Extremwerte sind (für $n = const.$) äquidistant,
- höherer Grad → bessere Annäherung,
- <u>Gibb'sches Phänomen</u>: Überhöhung an den Unstetigkeitsstellen.