Die **Koordinatenbasisvektoren** $\vec{b}_j$ am Punkt A mit den Koordinaten x^i_A sind: $x^i(\lambda) = \begin{cases} x^i_A + \lambda & , i = j \\ x^i_A & , i \neq j \end{cases}$.

Tangentialvektor: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx^i}{d\lambda}\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} (\vec{v})^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}^i \vec{b}_i$.

Kronecker-Symbol $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$.

Vektorprodukt $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \Leftrightarrow w^i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^i_{\ jk} u^j v^k$;

$\varepsilon^i_{\ jk}$ - vollständig antisymmetrisches **Levi-Civita-Symbol**: $\varepsilon^i_{\ jk} = \begin{cases} 1 & , (i,j,k) \text{ ist gerade Permutation von } \{1,2,3\}. \\ -1 & , (i,j,k) \text{ ist ungerade Permutation von } \{1,2,3\}. \\ 0 & , \text{falls irgend zwei Indizes übereinstimmen.} \end{cases}$

Basisvektorentransformation: $\vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i$

Vektorkomponententransformation: $\vec{v}^i = \sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} v^{k'}$; analog: $v^{i'} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} v^k$.

Die Matrizen $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right)$ (mit i als Zeilen- und k' als Spaltenindex) und $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right)$ sind zueinander <u>invers</u>: $\sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{dx^{k'}}{dx^j} = \partial^i_j$.

Beschleunigung in beliebigen System: $a^{j'} = \ddot{x}^{j'} + \sum_{k',l'=1}^{3} \Gamma^{j'}{}_{k'l'} \dot{x}^{k'} \dot{x}^{l'}$ (Geodätengleichung); Christoffel-Symbol: $\Gamma^{j'}{}_{k'l'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}$.

In <u>Inertialsystemen</u>: $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{b}_i$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \vec{b}_i$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i$.

In <u>krummlinigen Systemen Σ'</u>: $\vec{v} = \sum_{i'=1}^{3} \dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'}$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum_{i'=1}^{3} (\ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} + \dot{x}^{i'} \underbrace{\dot{\vec{b}}_{i'}}_{\neq 0})$, mit: $\dot{\vec{b}}_{i'} = \sum_{l'=1}^{3} \sum_{m'=1}^{3} \Gamma^{m'}{}_{i'l'} \dot{x}^{l'} \vec{b}_{m'}$.

In Galilei-Transformation gilt weiterhin das Transformationsgesetz für Basisvektoren und die Christoffel-Symbole verschwinden!

Newtonschen Axiome:

1. Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich in Inertialsystemen $\mathcal{S}$ auf einer Bahnkurve mit konstanter Geschwindigkeit.
2. Im Inertialsystem $\mathcal{S}$ ist die Änderung der Bewegungsgröße der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft: $\frac{d}{dt} m\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K}$.
3. Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der Massenpunkt zurückwirkt: $\vec{K}_{actio} = -\vec{K}_{reactio}$.

Wichtig: Kraft und Gegenkraft greifen <u>an verschiedenen Punkten</u> an!

Eindimensionale Bewegung unter dem Einfluss einer beliebigen ortsabhängigen Kraft:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E = const. \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{sign}(v_0) \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{{v_0}^2 + \frac{2}{m}[U(x_0) - U(\xi)]}} d\xi$$

Impulssatz: $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K}$ ($\hat{=}$ 2. Newtonschen Axiom)

Drehimpulssatz: $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$; Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, **Drehmoment** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{K}$.

Anmerkungen: Der Drehimpuls ist von der Wahl des Koordinatensystems abhängig (Drehpunkt beachten!!!) !
$(\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{L}' = \vec{r}\,' \times \vec{p} = (\vec{r} + \vec{r}_0) \times \vec{p} = \vec{L} + \vec{r}_0 \times \vec{p}$ $\lightning$.)

In einem Inertialsystem gilt $T + U = E = const.$, wenn $\mathrm{rot}(\vec{K}) = \vec{\nabla} \times \vec{K} = \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon^i{}_{jk} \frac{\partial K^k}{\partial x^j} \vec{b}_i = 0$ ($\exists$ Potential $\Leftrightarrow$ **konservativ**es Kraftfeld).

Die Kraft ist $\vec{K} = -\vec{\nabla} U = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x^i} \vec{b}_i = -\mathrm{grad}(U)$ und es gilt der Energieerhaltungssatz $\vec{K}\dot{\vec{r}} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x^i} \dot{x}^i = -\frac{dU}{dt}$.

Energiesatz: $\frac{d}{dt}(T + U) = \vec{K}_{diss.}\vec{v}$; **Arbeit**: $A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{K}\vec{v}\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}A = \vec{K}\,\mathrm{d}\vec{r}$; **Leistung**: $N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{K}\vec{v}$.

Gelten Drehimpulserhaltungs- und Energieerhaltungssatz, so folgt (in Zylinderkoordinaten):

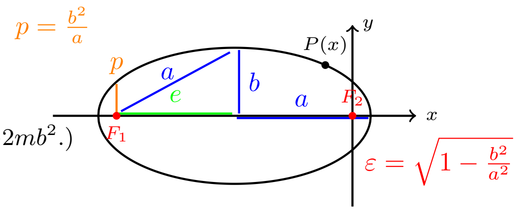
$$m\rho^2\dot{\varphi} = L, \qquad \tfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho) = E;$$

$$\Rightarrow t = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\tilde{\rho}) - \frac{L^2}{2m\tilde{\rho}^2})}}\,\mathrm{d}\tilde{\rho}\ (+t_0), \qquad \varphi = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L}{\tilde{\rho}^2\sqrt{2m(E - U(\tilde{\rho}) - \frac{L^2}{2m\tilde{\rho}^2})}}\,\mathrm{d}\tilde{\rho}\ (+\varphi_0).$$

Keplersche Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonnne steht.
2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ($\frac{T^2}{a^3} = const.$).

Kegelschnitte: $\rho = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)}$
mit $\varepsilon = 0$ - Kreis, $0 < \varepsilon < 1$ - Ellipse, $\varepsilon = 1$ - Parabel, $\varepsilon > 1$ - Hyperbel.
(Im Sonnensystem: $0 < \varepsilon < 1$, $E = -\frac{\gamma m M}{2a}$, $\frac{L^2}{E} = -2mb^2$.)



1. kosmische Geschwindigkeit (Satellit im Orbit): $v_1 = \sqrt{gR} \approx 7.9\frac{km}{s}$;
2. kosmische Geschwindigkeit (Flucht aus Erdanziehung): $v_2 \approx \sqrt{2gR} \approx 11.2\frac{km}{s}$.

Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen:

$\vec{x}\,' = \hat{O}(t)[\vec{x} - \vec{r}_0(t)]$ mit orthonormaler Matrix $\hat{O}$.

$\dot{\vec{b}}_{i'} = \omega \times \vec{b}_{i'}$, wenn $\hat{O}\frac{d\hat{O}^T}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{3'} & \omega^{2'} \\ \omega^{3'} & 0 & -\omega^{1'} \\ -\omega^{2'} & \omega^{1'} & 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{v} = \dot{r}_0 + \vec{v}\,' + \sum_{i'=1}^{3} x^{i'}(\vec{\omega} \times \vec{b}_{i'})$.

$\vec{a} = \vec{a}' + \ddot{\vec{r}}_0 + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{a_{\text{Coriolis}}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}_{a_{\text{Zentrifugal}}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$.

Systeme freier Massenpunkte:

Gesamtmasse $M = \sum_{n=1}^{N} m_n$, Schwerpunktsvektor: $\vec{s} = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} m_n\vec{r}_n$.

Schwerpunktsatz: $M\ddot{\vec{s}} = \vec{K}_{aussen}$. Drehimpulssatz: $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_{aussen}$.
Im Schwerpunktsystem gilt immer Drehimpulserhaltung!

Energiesatz: $\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_{nDiss}\dot{\vec{r}}_n$, falls $\vec{K}_n = -\mathrm{grad}_n(U) = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial U}{\partial x^i{}_n}\vec{e}_i$;

dafür notwendig: Vertauschbarkeit der 2. partiellen Ableitungen: $\frac{\partial K^i{}_n}{\partial x^j{}_m} = \frac{\partial K^j{}_m}{\partial x^i{}_n} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^j{}_m \partial x^i{}_n} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^i{}_n \partial x^j{}_m}$.

reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$.

Virialsatz: $\overline{T} - \frac{\kappa}{2}\overline{U} = 0$

$(\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_{n=1}^{N} \text{grad}_n(U)\vec{r}_n}$ und Eulersche Satz über positiv homogene Funktionen: $\overline{\sum_{n=1}^{N} \text{grad}_n(U)\vec{r}_n} = \kappa U.)$

Raketengleichung: $\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} - \vec{v}_a \dot{m} = \vec{K}$ (v_a Treibstoffaustrittsgeschw., $\vec{K}$ äußere Kraft.)

d'Alembertsche Prinzip:
Die der Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i, t) = 0$ zugeordnete Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$ leistet bei virtuellen Verrückungen $\partial\vec{r}_\alpha$ keine Arbeit: $\vec{Z}_\alpha \cdot \partial\vec{r}_\alpha = 0$ $(\Leftrightarrow \vec{Z}_\alpha \perp \partial\vec{r}_\alpha)$.

Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_\alpha$ auf eine Fläche $g_\alpha(x^i, t) = 0$: $\vec{n}_\alpha = \dfrac{\text{grad}(g_\alpha)}{|\text{grad}(g_\alpha)|}$.

Lagrange-Gleichung I. Art: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \underbrace{\lambda_\alpha \text{grad}(g_\alpha)}_{\vec{Z}_\alpha(t)}$

$\vec{K}$ - eingeprägte Kräfte
λ_α - Lagrangscher Multiplikator

Lösungsmethode:
- Inertialsystem $\mathcal{S}$ einführen, Zwangsbedingungen $g_\alpha(x^i, t) = 0$ aufstellen;
- Lagrange-Gleichungen I. Art aufstellen;
- Zwangsbedingungen zwei Mal nach der Zeit differenzieren, $\ddot{x}^i$ mit Lagrange-Gleichungen I. Art eliminieren, $\lambda_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ bestimmen;
- λ_α in Lagrange-Gleichungen I. Art einsetzen und diese unter Beachtung von g_α lösen;
- Zwangskräfte bestimmen.

Alternativ: **angepasste Koordinaten** wählen!

Impuls- $(\frac{\partial}{\partial t}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{K} + \vec{Z})$ bzw. Drehimpulserhaltung $(\frac{\partial}{\partial t}\vec{L} = \vec{r} \times (\vec{K} + \vec{Z}))$ gilt nur in speziellen Fällen.
Energieerhaltung $(\frac{d}{dt}(T + U) = \vec{Z}\dot{\vec{r}} = -\sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t})$ gilt, wenn die Zwangsbedingungen zeitlich konstant (**skleronom**) sind $(\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0)$.

(**rheonom** = zeitabhängige Zwangsbedingungen)

Eine **einseitige Bindung** hindert einen Massenpunkt nur daran, eine Fläche in eine Richtung zu verlassen; bezüglich aller anderen Richtungen frei $\Rightarrow$ $\vec{Z}_\alpha \cdot \partial\vec{r}_\alpha \geq 0$. Bis zum Ablösepunkt aber Lagrange I.

d'Alembertsches Prinzip für Massenpunktsystem: $\sum_{n=1}^{N} \vec{Z}_{\alpha,n} \partial\vec{r}_{\alpha,n} = 0$.
Im $3N$-dimensionalen "Konfigurationsraum" wird die Gesamtheit aller Ortskoordinaten durch einen Punkt beschrieben.
$g_\alpha(x_n^i, t) = 0$ beschreibt eine $(3N-1)$-dimensionale Hyperfläche $\mathcal{H}$ für t.
Jede virtuelle Verrückung liegt tangential an $\mathcal{H}$ und alle Zwangskräfte sind senkrecht zu $\mathcal{H} \Rightarrow \vec{Z}_{\alpha,n} = \lambda_\alpha \text{grad}_n(g_\alpha)$

Lagrange I: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{K}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \text{grad}_n(g_\alpha)$.

Kräfte:
innere, eingeprägte Kräfte
äußere, eingeprägte Kräfte
innere Zwangskräfte
äußere Zwangskräfte

Schwerpunktsatz: $M\ddot{\vec{s}} = \vec{K}_{\text{eing., auß}} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha,n}^{(a)}$

Drehimpulssatz: $\dfrac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} \left[\vec{r}_n \times \left(\vec{K}_n^{(a)} + \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha,n}^{(a)}\right)\right]$ falls $g_\alpha = g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)$, $\vec{K}_{nm} || (\vec{r}_n - \vec{r}_m)$.

Energiesatz: $\dfrac{d}{dt}(T + U) = -\sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial t}$ falls die eingeprägten Kräfte ein Potential $U(x_n)$ aufweisen.

(ein starrer Körper mit Drehung um z-Achse):

Trägheitsmoment: $\Theta = \sum_{n=1}^{N} m_n({x'_n}^2 + {y'_n}^2) \xrightarrow{m_n \to \mu\, dV} \int_K \mu({x'}^2 + {y'}^2) dV$, $\quad T = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2, \quad L^z = \Theta\dot{\varphi}, \quad M^z = \Theta\ddot{\varphi}$.

Äußere **Kraftdichte**: $K_n^{(a)} \to k_n^{(a)} dV, \quad \Rightarrow M^z = \frac{dL^z}{dt} = \sum_{n=1}^{N} [\vec{r}_n \times \vec{K}_n^{(a)}]^z \longrightarrow \int_K [\vec{r} \times k^{(a)}]^z dV.$

Steinersche Satz (Drehachsen parallel, mit Abstand l): $\Theta' = \Theta + Ml^2$

lineare Bewegung		**Rotationsbewegung**	
Ortskoordinate	x	Drehwinkel	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	Θ
Geschwindigkeit	$\dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
lineare Impuls	$p = m\,\dot{x}$	Drehimpuls	$L = \Theta \cdot \dot{\varphi}$
Kraft	$K = \frac{dp}{dt}$	Drehmoment	$M = \frac{dL}{dt}$
Translationsenergie	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$		$\frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Bewegungsgleichung	$m\ddot{x} = K$		$\Theta\ddot{\varphi} = M$

In **generalisierten** ($\hat{=}$ angepassten) Koordinaten erübrigt sich die Betrachtung der Zwangsbedingungen, da sie identisch **Null** werden!

Es gebe $N_F = 3\,N - N_Z$ **generalisierte Koordinaten** q_A $\quad (\forall A = 1, ..., N_F)$ und **generalisierte Kräfte** $Q_A = \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} K_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}$ $\quad (\forall A = 1, ..., N_F)$. Die **kinetische Energie** schreibt sich als: $T = \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2}(\dot{x}_n^i)^2$.
Unter der Annahme, dass K_n^i ein zeitunabhängiges Potential $U(x_n^i(q_A, t))$ aufweisen (U auch $\dot{q}_A$ unabhänig) und die Zwangsbedingungen holonom ($\sim$ nur koordinaten-, nicht geschwindigkeitsabhängig) sind, gilt:

Lagrange II - Formalismus: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial L}{\partial q_A} = 0$$

mit der **Lagrange-Funktion**: $$L = L(q_A, \dot{q}_A, t) = T(q_A, \dot{q}_A, t) - U(q_A, t).$$

Energiesatz: $$\frac{d}{dt}\left(\sum_{A=1}^{N_F} \dot{q}_A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t};$$ (N_F - Anzahl der Freiheitsgrade).

Gilt: $\frac{\partial L}{\partial q_B} = 0$, so heißt q_B **zyklisch** ($\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = const.$; $\Rightarrow$ Erhaltungssatz, vgl. Noether-Theorem);
ist $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, so gilt Energieerhaltung .

Lösungsmethode:

- Geeignete generalisierte Koordinaten q_A einführen, mit denen $x_n^i = x_n^i(q_A)$ die Zwangsbedingungen $g_\alpha(x_n^i) = 0$ identisch erfüllen;
- T, U und L als Funktionen der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten aufschreiben;
- Lagrange II formulieren;
- Lösen durch Ausnutzung der Erhaltungssätze.

Ein freier **starrer Körper** hat i.A. **6 Freiheitsgrade**; Beschreibung in einem erdfesten kartesischen Koordinatensystem $\mathcal{S}$ und einem im Schwerpunkt liegenden kartesischen und mitrotierendem Koordinatensystem Σ'. Die **kinetische Energie** T schreibt sich dann (M = Masse; $\vec{s}$ = Schwerpunktsvektor in $\mathcal{S}$; $\vec{\omega}$ = Drehung von Σ' bezüglich $\mathcal{S}$; μ = Dichte):

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{s}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i',k'=1}^{3} \omega^{i'}\omega^{k'}\Theta^{i'}_{k'}, \qquad \text{mit } \Theta^{i'}_{k'} = \int_K \mu\left(|\vec{r}'|^2\delta^{i'}_{k'} - x^{i'}x^{k'}\right) d^3\vec{r}'$$

mit $\Theta^{i'}_{k'}$ den Komponenten des **Trägheitstensors** $\overleftrightarrow{\Theta}$ in Σ'. Dieser ist **symmetrisch** ($\langle\vec{v}, \overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{w}\rangle = \langle\overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{v}, \vec{w}\rangle$) und **positiv definit** ($\forall\vec{v} \neq \vec{0} : (\overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{v})\vec{v} > 0$) und besitzt somit 3 reele Eigenwerte, sowie 3 orthonormale Eigenvektoren.

Das zugehörige **Transformationsgesetz** (Tensoren 2. Stufe): $$\Theta^{i''}_{k''} = \sum_{i',k'=1}^{3} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\Theta^{i'}_{k'}.$$

In einem körperfesten **Hauptachsensystem** Σ'' ist die Koeffizientenmatrix des Trägheitstensors **diagonal**:
$\Theta^{i''}_{k''} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$, mit den **Hauptträgheitsmomenten** des Körpers (Eigenwerten der Koeffizientenmatrix) auf der Diagonalen und $\vec{w}_i$ den **Trägheitsachsen** des Körpers (Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix).

"Unsymmetrischer Kreisel" - $A \neq B \neq C$; "symmetrischer Kreisel" - genau zwei stimmen überein; "Kugelkreisel" - $A = B = C$.

Trägheitsmoment bezüglich Drehachse mit Einheitsrichtungsvektor $\vec{n}$: $\Theta_{\vec{n}} = \int_K \mu(\vec{n} \times \vec{r}')^2 d^3\vec{r}' = (\overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{n})\vec{n}$.

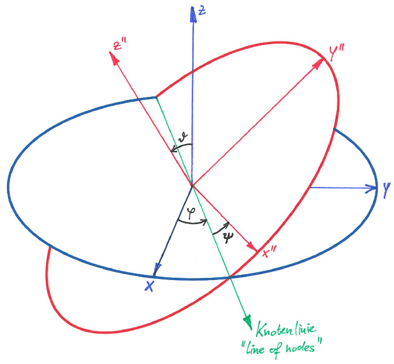
Trägheitsellipsoid: Sei $f(\vec{r}') = \vec{r}'(\overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{r}') - 1 = 0$; dies beschreibt ein Ellipsoid mit $|\vec{r}'_{\vec{n}}| = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}}$.

Verallgemeinerter Steinerscher Satz:
bezüglich Drehungen mit Drehachsen durch einen Punkt mit Ortsvektor $\vec{l}'$ in Drehrichtung $\vec{n}$ gilt:

$$\left(\left[\overleftrightarrow{\Theta}_{\vec{l}'}\right]^{i'}_{k'}\right) = \left(\Theta^{i'}_{k'}\right) + M \begin{pmatrix} (l^{y'})^2 + (l^{z'})^2 & -l^{x'}l^{y'} & -l^{x'}l^{z'} \\ -l^{x'}l^{y'} & (l^{x'})^2 + (l^{z'})^2 & -l^{y'}l^{z'} \\ -l^{x'}l^{z'} & -l^{y'}l^{z'} & (l^{x'})^2 + (l^{y'})^2 \end{pmatrix}.$$

Drehimpuls: $\vec{L} = \underbrace{M\vec{s} \times \dot{\vec{s}}}_{\vec{L}_{\text{Translation}}} + \underbrace{\overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{\omega}}_{\vec{L}_{\text{Rotation}}}$; wobei am Trägheitsellipsoid gilt: $\text{grad}_{\vec{r}'}(f) = 2\frac{\vec{L}_{\text{Rot}}}{|\vec{\omega}|}\frac{1}{\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}}$.

Kinetische Energie: $T = \underbrace{\tfrac{1}{2}M\dot{\vec{s}}^2}_{T_{\text{Translation}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{\omega})\vec{\omega}}_{T_{\text{Rotation}}}$.



Eulersche Kreiselgleichungen
Im Hauptachsensystem Σ'' gilt:

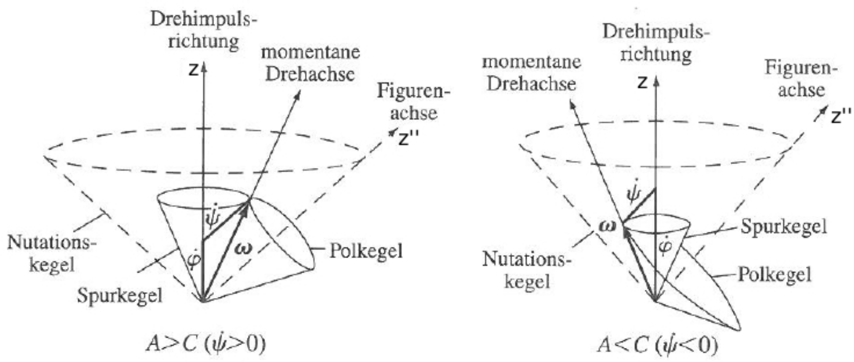
$$\begin{aligned} A\dot{\omega}^{x''} + (C-B)\omega^{y''}\omega^{z''} &= M'^{x''} \\ B\dot{\omega}^{y''} + (A-C)\omega^{x''}\omega^{z''} &= M'^{y''} \\ C\dot{\omega}^{z''} + (B-A)\omega^{x''}\omega^{y''} &= M'^{z''} \end{aligned}$$

Benutzt man zur Transformation von $\mathcal{S}$ nach Σ'' die **Eulerschen Winkel**, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega^{x''} &= \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\sin(\psi) + \dot{\vartheta}\cos(\psi) \\ \omega^{y''} &= \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\cos(\psi) + \dot{\vartheta}\sin(\psi) \\ \omega^{z''} &= \dot{\varphi}\cos(\vartheta) + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Für den **symmetrischen kräftefreien Kreisel** ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \vartheta_0 = const. \\ \varphi(t) &= \tfrac{L}{A}t + \varphi_0 \\ \psi(t) &= \tfrac{A-C}{AC}L\cos(\vartheta_0)t + \psi_0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \omega^{x''} &= \tfrac{L}{A}\sin(\vartheta_0)\sin(\psi(t)) \\ \omega^{y''} &= \tfrac{L}{A}\sin(\vartheta_0)\cos(\psi(t)) \\ \omega^{z''} &= \tfrac{L}{C}\cos(\vartheta_0) \end{aligned}.$$



Polkegel: $\vec{\omega}$ in Σ'' um z''-Achse mit Winkelgeschwindigkeit $-\dot{\psi}$.
Nutationskegel: Figurensymmetrieachse in $\mathcal{S}$ um z-Achse mit halbem Kegelöffnungswinkel ϑ_0.
Spurkegel: $\vec{\omega}$ in $\mathcal{S}$ um z-Achse mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.

Hamiltonsche Mechanik

Wirkungsfunktional: $S = S\{q_A\} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(q_A, \dot{q}_A, t)dt$

; wobei $q_A(t_1)$ und $q_A(t_2)$ fest vorgegeben sind und der Integrand die Lagrange-Funktion ist.

Hamilton-Prinzip:

"Die wirkliche Bahn, die von einem mechanischen System durchlaufen wird ($q_A = q_A(t)$), ist ein stationärer Punkt des Wirkungsfunktionals S."

Nach dem Variationsprinzip ergibt sich aus: $\dfrac{d}{d\tau} S\{q_a + \tau\tilde{q}_A\}|_{\tau=0} = 0$

die **Euler-Lagrange-Gleichung**, wobei q_A dann stationärer Punkt des Funktionals S ist; mit $\tilde{q}_A(t_1) = 0 = \tilde{q}_A(t_2)$.

Generalisierte Impulse: $p_A = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}$; das Paar (q_A, p_A) heißt **kanonisch konjugiert**.

Hamilton-Funktion: $H(q_B, p_B, t) = \displaystyle\sum_{A=1}^{N_F} \dot{q}_A(q_B, p_B, t)p_A - L(q_B, \dot{q}_B(q_C, p_C, t), t).$

Kanonische Gleichungen: $\frac{\partial H}{\partial p_B} = \dot{q}_B$, $-\frac{\partial H}{\partial q_B} = \dot{p}_B$; ($2\ N_F$ lineare Differentialgleichungen für (q_B, p_B), die im abstrakten, $2\ N_F$-dimensionalen **Phasenraum** definiert sind).

Energieerhalt: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$; Erhaltungsgrößen: $\frac{\partial H}{\partial q_B} = 0 \Rightarrow p_B =$const. ($q_B$ zyklisch).

Poisson-Klammer: $\{F, G\} = \displaystyle\sum_{A=1}^{N_F} \left[\frac{\partial F}{\partial q_A}\frac{\partial G}{\partial p_A} - \frac{\partial F}{\partial p_A}\frac{\partial G}{\partial q_A}\right] = -\{G, F\}.$

Mit ihnen: $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$; ist $\{F, H\} = 0$, so sagt man "F und H vertauschen".

Es gibt Kanonische Transformationen (erzeugende Funktionen $R_1, ..., R_4$) $\Rightarrow$ erzeugen neue H', Q_A, P_A;
mit diesen bildet man die Hamilton-Jacobi-Gleichung: $H' = H + \frac{\partial R_i}{dt} = 0$ und somit $P_A = const.$, $Q_A = const.$.

Für R_2 gilt gerade $R_2 = \int Ldt$, woraus sich durch einen additiven Separationsansatz (und Erhaltungssätze) die Bewegungsgleichungen bestimmen lassen.

$\mathrm{rot}(\vec{K}) = 0 \Rightarrow$ Energieerhalt; $\vec{K} \times \vec{r} = 0 \Rightarrow$ Drehimpulserhalt.

Drehungen:
$$\begin{aligned} x' &= x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) & x &= x'\cos(\varphi) - y'\sin(\varphi) \\ y' &= -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) & y &= x'\sin(\varphi) + y'\cos(\varphi) \end{aligned}$$