$G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $g : G \to \mathbb{R}^3$, $g \in C^1(G)$, injektiv mit $\operatorname{rk}(\mathrm{D}g(u,v)) = \operatorname{rk}\left(\begin{bmatrix} \partial_u g_1 & \partial_v g_1 \\ \partial_u g_2 & \partial_v g_2 \\ \partial_u g_3 & \partial_v g_3 \end{bmatrix}\right) = 2$ auf G.

$S := g(G) := \{g(u,v) : (u,v) \in G\}$; (S,g) heißt **Fläche** im $\mathbb{R}^3$ mit **Parameterdarstellung** g.

$U \subset \mathbb{R}^2$, $h : U \to \mathbb{R}^3 \in C^1(U)$, injektiv:
$h(s,t)$ heißt zulässige Parameterdarstellung von S
$:\Leftrightarrow \exists$ bijektive Abbildung $\mu : U \to G$ mit $\frac{\partial(\mu_1,\mu_2)}{\partial(s,t)} > 0$ und $h = g \circ \mu$ auf U.

$\vec{g}_u = \begin{bmatrix} \partial_u g_1 \\ \partial_u g_2 \\ \partial_u g_3 \end{bmatrix}$, $\vec{g}_v = \begin{bmatrix} \partial_v g_1 \\ \partial_v g_2 \\ \partial_v g_3 \end{bmatrix}$, $\vec{n}(u_0,v_0) = \dfrac{\vec{g}_u \times \vec{g}_v}{\|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\|}(u_0,v_0)$ heißt **Normaleneinheitsvektor** an S in $g(u_0,v_0)$.

Die Ebene, gegeben durch $[\vec{g}_u \times \vec{g}_v]\,(u_0,v_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ heißt **Tangentialebene** an S in (x_0,y_0,z_0).

- $\vec{g}_u \times \vec{g}_v \neq 0$ auf G, da $\operatorname{rk}(Dg) = \operatorname{rk}\big(\begin{bmatrix} g_u & g_v \end{bmatrix}\big) = 2$.
- Definition von $\vec{n}$ ist unabhängig von der zulässigen Parameterdarstellung.
- (S,g) wie zuvor; S lässt sich lokal als Graph einer Funktion darstellen.

Implizite Darstellung: $F \in C^1$, $F(x,y,z) = 0 \Rightarrow \vec{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$.

(S,g) heißt **kompakte Fläche** $\Leftrightarrow$
$\Omega \in \mathbb{R}^2$ offen, $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Abbildung, $B \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar und $\exists$ Jordan'sche Nullmenge $N \subset B$, so dass

a) g injektiv auf $B \backslash N$,

b) $\operatorname{rk}(Dg) = 2$.

$h : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $A \in \tilde{\Omega}$ kompakt und Jordan-messbar mit $S = h(A)$ und $\exists \mu : A \to B$, $\mu \in C^1(A)$ mit $\frac{\partial(\mu_1,\mu_2)}{\partial(s,t)} > 0$ und $h = g \circ \mu$
$\Rightarrow$ h heißt **zulässige Parameterdarstellung**.

$\omega(S) = \int_B \|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\| \,\mathrm{d}(u,v)$ heißt **Flächeninhalt** von S; dieser ist unabhängig von der zulässigen Parameterdarstellung.
$\mathrm{d}\omega = \|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\| \,\mathrm{d}(u,v)$ heißt **Oberflächenelement** von S.

Gauß'sche Fundamentalgrößen:

$$E = \vec{g}_u\vec{g}_u, \qquad F = \vec{g}_u\vec{g}_v, \qquad G = \vec{g}_v\vec{g}_v \qquad \Rightarrow \qquad \|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, (S,g) kompakte Fläche, $S \subset \Omega$

1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_S f \,\mathrm{d}\omega = \int_B f(g(u,v))\, \|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\| \,\mathrm{d}(u,v)$ heißt **Oberflächenintegral** 1. Art.
2. $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig, $\displaystyle\int_S \vec{v} \,\mathrm{d}\vec{\omega} = \int_B \vec{v}(g(u,v))\ [\vec{g}_u \times \vec{g}_v] \,\mathrm{d}(u,v)$ heißt Oberflächenintegral 2. Art.

Flächen in mehr als 3 Dimensionen

$g : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$ offen, $B \subset G$ Jordan-messbar und kompakt, $g \in C^1(G)$, $\operatorname{rk}(Dg) = m$ auf $B \backslash N$, injektiv auf $B \backslash N$ wobei N Nullmenge auf $\mathbb{R}^m$.
$S := g(B)$, (S,g) heißt „kompakte m-Fläche im $\mathbb{R}^n$".

$g(u) = \begin{bmatrix} g_1(u_1,\dots,u_m) \\ \vdots \\ g_n(u_1,\dots,u_m) \end{bmatrix}$ und $g_{ik} = \partial_{u_i} g \cdot \partial g_{u_k} g$, $i,k = 1,\dots,m$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\int_S F \,\mathrm{d}\omega = \int_B F(g(u)) \sqrt{\det[g_{ik}]} \,\mathrm{d}u. \qquad \textbf{(Flächenintegral)}$$

Oberfläche und Volumen der Einheitskugel in n Dimensionen:

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad V_n = \frac{1}{n}\omega_n.$$

$f(x) = \tilde{f}(r)$, $r = \|x\|$, radialsymmetrisch, ω_n Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{K(0,R)} f(x)\,\mathrm{d}x = \omega_n \int_0^R r^{n-1}\tilde{f}(r)\,\mathrm{d}r$$

$G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(x,t) \in G$, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, $\frac{\partial f}{\partial t}$ stetig auf G,
$B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan-messbar, so dass $B \times [\alpha,\beta] \in G$:

$$\Rightarrow \exists \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\textstyle\int_B f(x,t)\,\mathrm{d}x] = \int_B \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } t \in [\alpha,\beta].$$

$n=1$: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right] = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\ \mathrm{d}x + f(\psi(t),t)\,\dot{\psi}(t) - f(\varphi(t),t)\,\dot{\varphi}(t)$$

Green: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset \Omega$ Normalbereich ($= \{(x_1,x_2) : a \le x \le b, \varphi(x_1) \le x_2 \le \psi(x_1)\}$, $\varphi,\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar), $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ C^1-Vektorfeld

$$\Rightarrow \qquad \textstyle\int_B [\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1] dx = \int_{\partial B} \vec{v}\,\vec{\mathrm{d}x}.$$

Folgerung: Volumen $\mu(B) = \frac{1}{2}\int_{\partial B}[x_1\,\mathrm{d}x_2 - x_2\,\mathrm{d}x_1]$.

Und: $$\int_B \mathrm{div}(\vec{v})\,\mathrm{d}(x_1,x_2) = \oint_{\partial B} \vec{v}\ \vec{n}\,\mathrm{d}s$$

(S,g) kompakte Fläche mit $g : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich; $\partial B = \sum_i \Gamma_i$ und $\partial S = \sum_i g(\Gamma_i)$ heißt **Rand von** S.

S heißt „geschlossene Fläche“, wenn ∂S entartet ist ($g(\Gamma_i) = const.$, $g(\Gamma_i) = -g(\Gamma_j)$).

Stokes: (S,g) kompakte Fläche, $g \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $B \subset G$, B Normalbereich, $\Omega \subset B$, $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld auf Ω, Ω offen mit $S \subset \Omega$:

$$\int_S \mathrm{rot}(\vec{v})\,\vec{\mathrm{d}\omega} = \oint_{\partial S} \vec{v}\,\vec{\mathrm{d}x}$$

S geschlossen Fläche $\Rightarrow \displaystyle\int_S \mathrm{rot}(\vec{v})\,\vec{\mathrm{d}\omega} = 0$, $\qquad \mathrm{rot}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{v}$ konservativ, $\qquad$ (Stokes in 2D = Green)

$\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet, $\vec{w} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^2-Vektorfeld:

$\vec{w}$ heißt **Vektorpotential** von $\vec{v}$ auf Ω $:\Leftrightarrow$ $\vec{v} = \mathrm{rot}(\vec{w})$

mit $\vec{w}$ bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt ($\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Phi \in C^3(\Omega) \Rightarrow \vec{w} + \mathrm{grad}(\Phi)$ ist auch Vektorpot.).
Notwendige Bedingung: $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

Konstruktion von $\vec{w}$ für $\Omega = \mathbb{R}^3$ ($\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$):
$w_1(x,y,z) = \int_0^z v_2(x,y,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^y v_3(x,t,0)\,\mathrm{d}t$
$w_2(x,y,z) = -\int_0^z v_1(x,y,t)\,\mathrm{d}t$
$w_3(x,y,z) = 0$

Gauß-Ostrogradski:

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $B \subset \Omega$, $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld, B Normalbereich, ∂B geschlossene Fläche im $\mathbb{R}^3$, :

$$\int_B \mathrm{div}(\vec{v})\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial B} \vec{v}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\omega$$

Volumenberechnung: $$\mu(B) = \int_B \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{\partial B} \vec{x}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\omega = \textstyle\int_{\partial B} x_i n_i\,\mathrm{d}\omega$$ (hier $\mathbb{R}^3$, keine Summation über i)

Green'sche Sätze:

$\Omega \in \mathbb{R}^3$ offen, $B \subset \Omega$ Normalbereich, ∂B geschlossene Fläche, $\vec{n}$ äußerer Normalenvektor, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, $u, v \in C^2(\Omega)$; dann:

1. $\displaystyle\int_B u\,\Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}\omega - \int_B \nabla u\,\nabla v\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_B [u\,\Delta v - v\,\Delta u]\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B}\left[u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right]\mathrm{d}\omega$

$B \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet heißt „zulässig“, falls der Gauß'sche Satz auf ihm gilt. (Dann gelten auch die Green'schen Sätze.)

Maxwellsche Gleichungen

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\big(\vec{E}\big) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B} &= 0 & \oint_{\partial S}\vec{E}\mathrm{d}\vec{x} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{\omega} &= 0 && \text{(Faradaysches Gesetz)}\\
\operatorname{div}\big(\vec{D}\big) &= \rho & \oint_{\partial G}\vec{D}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\omega &= \int_G \rho\,\mathrm{d}x = Q && \text{(Gaußsches Gesetz)}\\
\operatorname{rot}\big(\vec{H}\big) - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{D} &= \vec{j} & \oint_{\partial S}\vec{H}\mathrm{d}\vec{x} - \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{\omega} &= \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{\omega} = I && \text{(Ampèresches Gesetz)}\\
\operatorname{div}\big(\vec{B}\big) &= 0 & \oint_{\partial G}\vec{B}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\omega &= 0
\end{aligned}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}(x)$

Elektrostatik $\Rightarrow$ Laplace-Poisson-Gleichung: $-\Delta u = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho - \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}\big(\vec{P}\big)$

Allgemein ($\varepsilon := \mu_0 := 1$) $\Rightarrow$ Wellengleichungen: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \rho(x,t)$ und $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \vec{j}(x,t)$ mit $\vec{H} = \operatorname{rot}\big(\vec{A}\big)$.

Dies sind Spezialfälle elliptischer DGL:

$$-\operatorname{div}\big(\hat{A}(x)\ \operatorname{grad}(u(x))\big) + \vec{b}(x)\operatorname{grad}(u(x)) + c(x)u(x) = f(x)$$

mit $\hat{A}(x)$ positiv definit auf Ω, $\vec{b}(x)$, $c(x)$, $f(x)$ gegeben und Randwertproblemen: $\begin{cases}\text{Dirichlet}: u(y) = \varphi(y) : \forall y \in \partial\Omega\\ \text{Neumann}: \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) = \psi(y) : \forall y \in \partial\Omega\end{cases}$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **harmonisch** $\Leftrightarrow$ $u \in C^2(\Omega) \wedge \Delta u = 0$.

$u(x) = V(\|x\|)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \Leftrightarrow u(x) = \begin{cases} b\ln(\|x\|) + c & ,n = 2\\ \dfrac{b}{\|x\|^{n-2}} + c & ,n > 2\end{cases}$ $;b,c \in \mathbb{R}\ const.$.

Fundamentallösung der Laplace-Gleichung: $\Gamma(x,y) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln(\|x-y\|) & ,n=2\\ -\dfrac{1}{[n-2]\,\omega_n}\dfrac{1}{\|x-y\|^{n-2}} & ,n>2\end{cases}$ $,x,y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$.

Sei $K_\delta(x)$ eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Radius δ und Mittelpunkt in x, $\vec{n}(y) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ Normaleneinheitsvektor in $y \in \partial K_\delta(x)$ (nach innen zeigend); dann ist: $\dfrac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\vec{n}(y)} = -\dfrac{1}{\omega_n}\dfrac{1}{\|x-y\|^{n-1}} = -\dfrac{1}{\omega_n\delta^{n-1}}$.

Es existiert $\displaystyle\int_{K_\delta(x)}\Gamma(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{\|y-x\|<\delta}\ln(\|y-x\|) & ,n=2\\ -\frac{1}{[n-2]\,\omega_n}\int_{\|y-x\|<\delta}\frac{\mathrm{d}y}{\|y-x\|^{n-2}} & ,n>2\end{cases}$.

$m \in \mathbb{N}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \exists D^\alpha u \text{ stetig auf } \Omega, |a| \le m\}$, dann heißt:

$C^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega) : \forall\alpha : |\alpha| \le m \text{ existiert stetige Fortsetzung auf } \partial\Omega\}$; dann: $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}(y) = \nabla u(y)\cdot\vec{n}(y)$.

Green'sche Darstellungsformel:
$\Omega \in \mathbb{R}^n$ zulässiges Gebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\vec{n}(y)$ äußerer Normaleneinheitsvektor an $\partial\Omega$ in $y \in \partial\Omega$; dann gilt $\forall x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[u(y)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}(y)}(x,y) - \Gamma(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}(y)}(y)\right]\mathrm{d}\omega(y) + \int_\Omega \Gamma(x,y)\,\Delta u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es sei $G(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y)$ mit $\Phi(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega}) : \forall x \in \Omega$ und $\Delta_y\Phi(x,y) = 0 : \forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega$; dann gilt für $u \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[u(y)\,\frac{\partial G}{\partial\vec{n}(y)}(x,y) - G(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}(y)}(y)\right]\mathrm{d}\omega(y) + \int_\Omega G(x,y)\,\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \qquad , x \in \Omega.$$

Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch $\Rightarrow u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}(y)}(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(y)}(y) \right] \mathrm{d}\omega(y) \quad , x \in \Omega.$

$G(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y)$ heißt Green'sche Funktion für Ω $:\Leftrightarrow$:

1. $\forall x \in \Omega$ ist $\Phi(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$,
2. $\forall x \in \Omega$ ist $\Delta_y \Phi(x,y) = 0$ auf Ω,
3. $\forall x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$ ist $G(x,y) = 0$.

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch, $G(x,y)$ Green'sche Funktion für Ω; dann gilt $\forall x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}(y)}(x,y)\ \mathrm{d}\omega(y)$$

Green'sche Funktion für die Einheitskugel ($K = \{x : ||x|| < 1\}$, $\overline{x} = \frac{x}{||x||^2} : x \neq 0$, $\tilde{\Gamma} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(r) & , n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{r^{n-2}} & , n > 2 \end{cases}$):

$$G(x,y) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(||x-y||) - \tilde{\Gamma}(||x|| \cdot ||\overline{x} - y||) & , x \neq 0 \\ \tilde{\Gamma}(||y||) - \tilde{\Gamma}(1) & , x = 0 \end{cases}.$$

$G(x,y) = G(y,x)$ und $G(x,y) \leq 0 \ : \ \forall x,y \in K$.

Sei $u \in C^2(\overline{K})$ harmonisch auf K; dann gilt: $\quad u(x) = \frac{1-||x||^2}{\omega_n} \int_{\partial K} \frac{u(y)}{||x-y||^n} \mathrm{d}\omega(y) \quad , \forall x \in K$; mit $\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\right|_{||y||=1}$.

$$\boxed{\frac{1-||x||^2}{\omega_n} \int_{\partial K} \frac{1}{||x-y||^n} \mathrm{d}\omega(y) = 1,\ \forall x \in K}$$

Sei $\varphi : \partial K \to \mathbb{R}$ stetig auf $\partial K = \{y : ||y|| = 1\}$ und $u(x) = \frac{1-||x||^2}{\omega_n} \int_{\partial K} \frac{\varphi(y)}{||x-y||^n} \mathrm{d}\omega(y)$, dann gilt:

1. $\Delta u(x) = 0 \quad$ auf $K = \{x : ||x|| < 1\}$,
2. $\exists \lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y) \quad : \forall y \in \partial K$. (→ Dirichlet-Problem)

Daraus folgt: $\varphi : \partial K_R \to \mathbb{R}$ stetig, $K_R = \{x : ||x|| < R\}$ und $u(x) = \frac{R^2 - ||x||^2}{R\omega_n} \int_{\partial K_R} \frac{u(y)}{||x-y||^n} \mathrm{d}\omega(y)$ ist Lösung von:

1. $\Delta u(x) = 0 \quad$ auf K_R
2. $\lim_{x \to y^0} (u(x)) = \varphi(y^0) \quad : \forall y \in \partial K_R$

$\Omega \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$, Ω offen; dann gilt: $\ u$ harmonisch auf $\Omega \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ (i.e. beliebig oft diff'bar.)

Mittelwerteigenschaften: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$:

1. u heißt subharmonisch auf $\Omega \Leftrightarrow \Delta u(x) \geq 0$ auf Ω.
2. u heißt superharmonisch auf $\Omega \Leftrightarrow \Delta u(x) \leq 0$ auf Ω.

$$\int_{\Omega_0} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}\omega$$

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u(x)=0$; dann gilt für jede Kugel $K_R(x)$ mit $\overline{K_R(x)} \subset \Omega$ $(<, \leq, >, \geq)$

1. $u(x) = \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R} u(y)\,\mathrm{d}\omega(y) \quad$, wobei $|\partial K_R| = R^{n-1}\omega_n$ Flächeninhalt der Kugeloberfläche, $(>, \geq, <, \leq)$
(sphärische Mittelwerteigenschaft)
2. $u(x) = \frac{1}{|K_R|} \int_{K_R} u(y)\,\mathrm{d}y \quad$, wobei $|K_R| = R^n v_n = \frac{R^n \omega_n}{n}$ Volumen von K_R. $(>, \geq, <, \leq)$
(Kugelmittelwerteigenschaft)

$u \in C^2(\Omega)$ erfülle die sphärische Mittelwerteigenschaft ($u(x) \geq \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R} u(y)\,\mathrm{d}\omega(y)$ für alle $\overline{K_R(x)} \subset \Omega$)
$\Rightarrow u$ ist superharmonisch, d.h. $\Delta u(x) \leq 0$ auf Ω.

$u \in C^2(\Omega)$ erfülle die sphärische Mittelwerteigenschaft ($u(x) \leq \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R} u(y)\,\mathrm{d}\omega(y)$ für alle $\overline{K_R(x)} \subset \Omega$)
$\Rightarrow u$ ist subharmonisch, d.h. $\Delta u(x) \geq 0$ auf Ω.

$u \in C^2(\Omega)$, $\forall\, \overline{K_R(x)} \subset \Omega$ gelte: $u(x) = \dfrac{1}{|K_R|} \displaystyle\int_{K_R} u(y)\,\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \forall\, \overline{K_R(x)} \subset \Omega$ gilt: $u(x) = \dfrac{1}{|\partial K_R|} \displaystyle\int_{\partial K_R} u(y)\,\mathrm{d}\omega(y)$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$; dann gilt: u ist harmonisch $\Leftrightarrow$ es gilt SMWE $\Leftrightarrow$ es gilt KMWE.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet (i.e. offen, zusammenhängend; nicht notwendigerweise beschränkt); dann:

1. $u \in C^2(\Omega)$, u subharmonisch auf Ω, es existiere $x^0 \in \Omega$ mit $u(x^0) = \sup\limits_{x\in\Omega}[u(x)]$; dann ist $u(x) = const.$ auf Ω. („Starkes Maximumprinzip")
2. $u \in C^2(\Omega)$, u superharmonisch auf Ω, es existiere $x^0 \in \Omega$ mit $u(x^0) = \inf\limits_{x\in\Omega}[u(x)]$; dann ist $u(x) = const.$ auf Ω. („Starkes Minimumprinzip")

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \wedge u \in C(\overline{\Omega})$:

1. u subharmonisch auf $\Omega \Rightarrow \forall x \in \Omega : u(x) \leq \max\limits_{y\in\partial\Omega}(u(y))$;
2. u superharmonisch auf $\Omega \Rightarrow \forall x \in \Omega : u(x) \geq \min\limits_{y\in\partial\Omega}(u(y))$.

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \wedge u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch $\Rightarrow \forall x \in \Omega : \inf\limits_{y\in\partial\Omega}(u(y)) \leq u(x) \leq \sup\limits_{y\in\partial\Omega}(u(y))$.
(wobei $\inf\limits_{y\in\partial\Omega}(u(y)) = -\infty$ und $\sup\limits_{y\in\partial\Omega}(u(y)) = \infty$ zugelassen sind. „schwaches Max-/Minimumprinzip")

$\Omega = \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch und beschränkt $\Rightarrow u = const.$ auf $\mathbb{R}^n$. (Liouville)

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \neq \varnothing$, $f \in C(\Omega)$; seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f = -\Delta v$; dann gilt:

1. $u(y) \leq v(y)$ auf $\partial\Omega \Rightarrow u(x) \leq v(x)$ auf Ω,
2. $u(y) = v(y)$ auf $\partial\Omega \Rightarrow u(x) = v(x)$ auf Ω.

Das Dirichlet-Problem für die Poissongleichung ($-\Delta u = f$ auf Ω und $u(y) = g(y)$ auf $\partial\Omega$) hat <u>höchstens</u> eine Lösung.

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ seien Lösungen von $-\Delta u = f = -\Delta v$ mit $\begin{array}{ll} u(y) = \varphi(y) & : y \in \partial\Omega \\ v(y) = \psi(y) & : y \in \partial\Omega \end{array}$ und es gelte
$\sup\limits_{y\in\partial\Omega} |u(y) - v(y)| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow |u(x) - v(x)| \leq \varepsilon \; : \forall x \in \Omega$.

$f \in C(\overline{\Omega})$, Ω zulässiges Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $\Delta u = -f$ auf Ω; wir setzen: $u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \ln(\|x-y\|)\, f(y)\,\mathrm{d}y & , n = 2 \\ \frac{1}{[n-2]\omega_n}\int_\Omega \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}y & , n \geq 3 \end{cases}$.
(u heißt „Newton-Potential von f")

$f \in C(\overline{\Omega})$, Ω zulässiges Gebiet, u Newton-Potential von f; dann gilt:

1. $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$,
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma(x,y)\, f(y)\;\mathrm{d}y$, $x \in \mathbb{R}^n, j = 1, ..., n$,
3. $n > 2 \Rightarrow \lim\limits_{\|x\|\to\infty}(u(x)) = 0$.

$f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y)\, f(y)\; \mathrm{d}y$ Newton-Potential, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ zulässiges Gebiet; dann gilt:

1. $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = f$ auf Ω,
2. $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$,
3. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega})$ und $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$.

(Der Träger einer Funktion („support“): $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$)

Die eindeutig bestimmte Lösung des RWP's $-\Delta u(x) = f(x) : \forall x \in \Omega$, $u(y) = g(y) : \forall y \in \partial\Omega$ auf der Kugel $\Omega = K_R(0)$, mit $g : \partial K_R(0) \to \mathbb{C}$ stetig und $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ergibt sich zu:

$$u(x) = \frac{R - \|x\|^2}{\omega_n\, R} \int_{\|y\|=R} \frac{g(y) + \int_{K_R} f(x)\, \Gamma(y,x)\; \mathrm{d}x}{\|x-y\|^n}\, \mathrm{d}\omega(y) - \int_{K_R} f(y)\, \Gamma(x,y)\; \mathrm{d}y$$

$$\varphi \in C^\infty(\Omega) \wedge \mathrm{supp}(\varphi) \subset (\Omega) \Leftrightarrow \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

u heißt <u>schwache Lösung</u> von $-\Delta u = f$, falls: $\displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \;: \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

inhomogene Wärmeleitungs- / Diffusionsgleichung: $u_t(x,t) - a^2\, \Delta u(x,t) = f(x,t)$

Cauchy-Problem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:
Gegeben $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, f, u_0 beschränkt, dann: $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt Lösung des Cauchy-Problems für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung $\Leftrightarrow$

1. $u_t - \Delta u = f(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,
2. $u(x,0) = u_0(x)$ auf $\mathbb{R}^n$.

wobei $u, u_t, D_x^\alpha u (: \forall |\alpha| \leq 2) \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. (o.B.d.A.: $a = 1$, durch Koordinatentransformation möglich.)

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ ist die **Fundamentallösung**: $\displaystyle\Phi(x,t) = \frac{1}{[4\pi t]^{n/2}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$; für sie gilt:

1. $\Phi_t - \Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,t)$,
2. $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, \mathrm{d}x = 1 \quad : \forall t > 0$.

$$\lim_{t\to 0} \Phi(x,t) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, dann ist eine Lösung des Cauchy-Problems für die homogene Wärmeleitungsgleichung:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, u_0(y)\; \mathrm{d}y \quad : \forall x \in R^n, t > 0 \quad \text{; es gilt:}$$

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ beschränkt,
2. $u_t - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,
3. $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(x^0,0)} u(x,t) = u_0(x^0) \quad : \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$.

$u_0(x) \geq 0$ und $\exists x \in \mathbb{R}^n : u_0(x) \neq 0$, dann: $u(x,t) > 0 \;: \forall t \in (0,\infty), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit!

$u_t - \Delta u = 0$ und $u(x,0) = 0$, dann: $\exists u(x,t) \not\equiv 0$. (Cauchy-Problem ist i.A. nicht ohne Randbedingungen eindeutig lösbar.)

$f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ beschränkt; sei $\displaystyle u(x,t) = \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\; \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}s$, dann gilt:

1. $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $u(\cdot,t) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $u(x,\cdot) \in C^1((0,\infty)))$,
2. $u_t - \Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,
3. $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(x^0,0)} (u(x,t)) = 0 \quad : \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Eine Kombination

- der Lösung der homogenen Gleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen ($v_t - \Delta v = 0 \;\wedge\; v(x,0) = u_0(x)$) mit
- der Lösung der inhomogenen Gleichung mit homogenen Anfangsbedingungen ($w_t - \Delta w = f \;\wedge\; w(x,0) = 0$)

löst die inhomogene Gleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen: $u = v + w$, $u_t - \Delta u = f \;\wedge\; u(x,0) = u_0(x)$.

Cauchy-Problem für die 1-dimensionale Wellengleichung:

Gegeben: $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $c > 0$.

Gesucht: $u(x,t) \;: x \in \mathbb{R}, t > 0$, so dass
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2\, u_{xx}(x,t) &= f(x,t) &&: \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \;. \\ u(x,0) &= u_0(x) &&: \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= u_1(x) &&: \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $u : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R} \times I)$ ist eine Lösung von $u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0$ auf $\mathbb{R} \times I$.
$\Leftrightarrow$ Es existieren Funktionen $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ mit $u(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$.

Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, dann ist $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\right] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\,\mathrm{d}y$ die eindeutig bestimmte Lösung von
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2\, u_{xx}(x,t) &= 0 &&: \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \;. \\ u(x,0) &= u_0(x) &&: \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= u_1(x) &&: \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mit $(Mg)(x,ct) = \dfrac{1}{2ct}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y$ ergibt sich:
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\,\mathrm{d}y \;\Leftrightarrow\; u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\,(Mu_0)(x,ct)\right] + t\,(Mu_1)(x,ct)$$

Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, dann ist: $u(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t \left[\int_{x-c[t-s]}^{x+c[t-s]} f(y,s)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s \;\in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ die eindeutig bestimmte Lösung von
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2\, u_{xx}(x,t) &= f(x,t) &&: \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \;. \\ u(x,0) &= 0 &&: \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= 0 &&: \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eine Superposition der Lösung der homogenen Gleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen mit einer der inhomogenen Gleichung mit homogenen Anfangsbedingungen löst dann eine inhomogene Gleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen.

Cauchy-Problem für die 3-dimensionale Wellengleichung: (Δ rein räumlich $\to \frac{\partial}{\partial x_i}$)

$f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $u_0, u_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ es existiert höchstens eine Lösung des Cauchy-Problems.

Gegeben: $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$.

Gesucht: $u(x,t) \;: x \in \mathbb{R}^3, t > 0$, so dass
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2\, \Delta u(x,t) &= f(x,t) &&: \forall x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \;; \text{ dann ist:} \\ u(x,0) &= u_0(x) &&: \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) &= u_1(x) &&: \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

o.B.d.A. $c = 1$, sonst $\tilde{u}(x,t) = u(x, \frac{t}{c})$ und $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ entsprechend skaliert.

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\|x-y\|=t} u_1(y)\;\mathrm{d}\omega(y) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{\|x-y\|=t} u_0(y)\;\mathrm{d}\omega(y)\right]$$

Lösung der homogenen Wellengleichung. („Kirchhoff'sche Formel")

Mit $[Mg](x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\|x-y\|=t} g(y)\;\mathrm{d}\omega(y)$ (sphärischer Mittelwert): $u(x,t) = t\,[Mu_1](x,t) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left[t\,[Mu_0](x,t)\right]$.

Huygen'sche Eigenschaft: (nur für $n = 3, 5, 7, \ldots$)

Der Einfluss von u_0, u_1 (mit $\text{supp}(u_0)$, $\text{supp}(u_1)$ beschränkt) auf $u(x,t)$ besteht nur in einem endlichen Intervall (t_1, t_2).

Die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) && : \forall x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) &= 0 && : \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) &= 0 && : \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$
für die 3-dimensionale Wellengleichung ist ($f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$):

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|x-y\| \le t} \frac{f(y, t - \|x-y\|)}{\|x-y\|} \, dy.$$

Cauchy-Problem für die 2-dimensionale Wellengleichung:
Die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && : \forall x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0 && : \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= u_1 && : \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$
für die 2-dimensionale Wellengleichung ist ($u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|x-y\| \le t} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2 - \|x-y\|^2}} \, dy + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\|x-y\| \le t} \frac{u_0}{\sqrt{t^2 - \|x-y\|^2}} \right].$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) && : \forall x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) &= 0 && : \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= 0 && : \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$
für die 2-dimensionale Wellengleichung ist ($f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left[\int_{\|x-y\| \le t-s} \frac{f(y,s)}{\sqrt{(t-s)^2 - \|x-y\|^2}} \, dy \right] ds.$$

Huygen'sche Eigenschaft gilt hier nicht!

Rand-Anfangswertproblem: (eindimensionale Wellengleichung)

1. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ auf $(0,l) \times (0,\infty)$ (inhomogene DGL)
2. $u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad : \forall t > 0$ (homogene Randbedingungen)
3. $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x) \quad : \forall x \in (0,l)$ (inhomogene Anfangsbedingungen)

Ansatz: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ mit

1. $v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t)$ auf $(0,l) \times (0,\infty)$
2. $v(0,t) = v(l,t) = 0 \quad : \forall t > 0$
3. $v(x,0) = 0$, $v_t(x,0) = 0 \quad : \forall x \in (0,l)$

1. $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$ auf $(0,l) \times (0,\infty)$
2. $w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad : \forall t > 0$
3. $w(x,0) = u_0(x)$, $w_t(x,0) = u_1(x) \quad : \forall x \in (0,l)$

Separationsansatz: $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$; Einsetzen, Umformen: $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{c^2 T}$. Da dies für alle x und t gilt, besagt der **Separationsschluss**, dass $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{c^2 T} = \lambda$, wobei λ <u>keine</u> Funktion von x oder t ist.

$\Rightarrow X'' - \lambda X = 0$, $X(0) = X(l) = 0$ und $T'' - \lambda c^2 T = 0$

$$\Rightarrow X_k(x) = c_k \sin(\tfrac{k\pi}{l} x) \quad : k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad T_k(t) = A_k \cos(\frac{k\pi c}{l} t) + B_k \sin(\frac{k\pi c}{l} t) \quad : k \in \mathbb{N}, A_k, B_k \in \mathbb{R}.$$

$$\to w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\frac{k\pi c}{l} t) + b_k \sin(\frac{k\pi c}{l} t) \right] \sin(\frac{k\pi}{l} x) \text{ mit } w(x,0) = u_0(x) \text{ und } w_t(x,0) = u_1(x).$$

Mit **Fourier** ergeben sich: $a_k = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l u_0(x) \sin(\frac{k\pi}{l} x) \, dx$, $b_k = \dfrac{2}{c\pi k} \displaystyle\int_0^l u_1(x) \sin(\frac{k\pi}{l} x) \, dx \quad \in \mathbb{R}$.

Für $v(x,t)$ macht man einen angepassten Ansatz: $v(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(\frac{k\pi}{l} x)$, entwickelt $f(x,t)$ in Sinusreihe:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin(\frac{k\pi}{l}x) \quad \text{mit} \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\,\sin(\frac{k\pi}{l}x)\,\mathrm{d}x \quad : k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow T_k'' + [\frac{ck\pi}{l}]^2 T_k = f_k(t) \quad , \quad T_k(0) = 0 \quad \text{und} \quad T_k'(0) = 0. \qquad \text{(lösbar!)}$$

Mit inhomogenen Randbedingungen:

1. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \quad \text{auf } (0,l) \times (0,\infty)$ (inhomogene DGL)
2. $u(0,t) = \mu_0(t) \quad , \quad u(l,t) = \mu_1(t) \quad : \forall t > 0$ (inhomogene Randbedingungen)
3. $u(x,0) = u_0(x) \; , \; u_t(x,0) = u_1(x) \quad : \forall x \in (0,l)$ (inhomogene Anfangsbedingungen)

lässt sich das Problem über folgenden Ansatz:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \quad \text{mit} \quad w(x,t) = \mu_0(t) + \frac{x}{l}(\mu_1(t) - \mu_0(t)) \qquad \text{(RB automatisch erfüllt)}$$

auf das vorige zurückführen.

1. $v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t) - w_{tt} = \tilde{f}(x,t) \quad \text{auf } (0,l) \times (0,\infty)$
2. $v(0,t) = v(l,t) = 0 \quad : \forall t > 0$
3. $v(x,0) = u_0(x) - w(x,0) = \tilde{u}_u(x) \quad , \quad v_t(x,0) = u_1(x) - w_t(x,0) = \tilde{u}_1(x) \quad : \forall x \in (0,l)$.

Fourierreihen:

$l > 0,\ f,g \in R([-l,l])$ („Riemann-integrierbar auf $[-l,l]$“)

„Skalarprodukt“: $\langle f,g\rangle := \int_{-l}^{l} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ „Norm“: $\|f\| := \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-l}^{l} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$

Konvergenz: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|s_n(x) - s(x)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\int_{-l}^{l} |s_n(x) - s(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = 0$

(„Konvergenz im quadratischen Mittel“)

Orthonormalsystem: $\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2l}}}_{\varphi_0}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right)}_{\varphi_k}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right)}_{\psi_k} \right\} \qquad k \in \mathbb{N}.$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f &= \langle f,\varphi_0\rangle\,\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle f,\varphi_k\rangle\,\varphi_k + \langle f,\psi_k\rangle\,\psi_k] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\,\mathrm{d}x}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\cos\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x}_{a_k}\,\cos\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right) + \underbrace{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\sin\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x}_{b_k}\,\sin\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right)\right] \end{aligned}$$

n-te Partialsumme: $s_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right) + b_k\sin\left(\frac{k\,\pi}{l}x\right)\right]$; a_0, a_k, b_k heißen Fourierkoeffizienten.

$f \in R([-l,l]) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n f\| = 0$

$f \in R([-l,l]) \quad \Rightarrow \quad \|f\|^2 = l\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]\right]$ (Parseval'sche Gleichung)

f stetig auf $[-l,l]$ und Existenz aller links- und rechtsseitigen Ableitungen ($\to \exists \varepsilon > 0 : \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} s_n f(x_0) = \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0-\varepsilon)}{2}$ „arithmetisches Mittel"), dann gilt absolute Konvergenz der Fourierreihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} [|a_k| + |b_k|] < \infty \right)$$

$\Leftrightarrow$ die Fourierreihe gleichmäßig (also auch punktweise) gegen die Funktion f konvergiert

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-l,l]} (|s_n f(x) - f(x)|) = 0 \right).$$

Gliedweise Differentiation und Integration für physikalische Probleme i. A. erlaubt.
Entwicklung in reine sin- oder cos-Reihen durch ungerade oder gerade Fortsetzung möglich.

Hilbertraum:

1. reeller oder komplexer Vektorraum H mit $\dim(H) = \infty$ (unendlicher Dimension),
2. Skalarprodukt in H: $\langle u, v\rangle$,
3. Norm: $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$
4. Konvergenzbegriff: $u_j \to u$ in H $:\Leftrightarrow \lim\limits_{j\to\infty} \|u_j - u\| = 0$,
5. Vollständigkeit (jede Cauchy-Folge in H ist konvergent).

$\{v_j\}_{j\in J}$, J abzählbar, heißt „vollständiges Orthonormalsystem" $\Leftrightarrow$ 1. $\langle v_j, v_k\rangle = \begin{cases} 0 & , j \neq k \\ 1 & , j = k \end{cases}$,

2. $\forall v \in H$: $v = \sum\limits_{j\in J} \langle v, v_j\rangle\, v_j$.

$\{v_j\}_{j\in J}$ erfülle 1., dann: 2. $\Leftrightarrow \left\{ \overbrace{\forall v \in H : \|v\|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\langle v, v_j\rangle|^2}^{\text{Parseval'sche Gleichung}} \right\} \Leftrightarrow \Big\{ [\forall j \in J \text{ gelte } \langle v, v_j\rangle = 0] \Rightarrow v = 0 \Big\}$.

Beispielhaft: Poisson-Gleichung: $-\Delta u = f$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $u|_{\partial\Omega} = 0$.
Lösung: Sei $\{u_j\}_{j\in J}$ **Orthonormalsystem** bezüglich $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)\, \overline{v(x)}\, \mathrm{d}x$.
Dann entwickelt man: $f = \sum\limits_{j\in J} a_j\, u_j$, $u = \sum\limits_{j\in J} b_j\, u_j$ mit $a_j = \langle f, u_j\rangle$, $b_j = \langle u, u_j\rangle$, $j \in J$ $\Rightarrow -\Delta u_j = \dfrac{a_j}{b_j} u_j$.
„Eigenwertproblem" von $-\Delta$ auf Ω mit Eigenwerten $\lambda_j = \dfrac{a_j}{b_j}$ und Eigenfunktionen u_j.
Schließlich Superposition: $u(x) = \sum\limits_{j\in J} \dfrac{\langle f, u_j\rangle}{\lambda_j} u_j$.

Komplexe Funktionen:

- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein vollständiger normierter (metrischer) Raum.
- Konvergenz, topologische Grundbegriffe (offene, abgeschlossene, kompakte Mengen, ...).
- $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ heißt „komplexe Funktion".
- Grenzwert: $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z))$
- $z \in G$: $f(z) = \mathrm{Re}\,(f(z)) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f(z))$;

sei nun: $f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\ v(x, y)$ mit $u, v : \underbrace{\{(x, y) : x + \mathrm{i}\ y \in G\}}_{=\tilde{G}\subset\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$.

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \overset{0}{D} \neq \emptyset$, $f : D \to \mathbb{C}$, dann:

$$f \text{ heißt komplex differenzierbar in } z_0 \iff \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C} .$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (z^n)' = n\, z^{n-1} \\ \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \\ (\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z \\ (\cos(z))' = -\sin(z) \\ (\sin(z))' = \cos(z) \\ (\cosh(z))' = \sinh(z) \\ (\sinh(z))' = \cosh(z) \end{array}}$$

$f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$; dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist diff'bar in z_0.
2. $\exists c \in \mathbb{C} : \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - c\,[z - z_0]}{z - z_0} = 0$ und $c = f'(z_0)$.
3. $\exists h : D \to \mathbb{C}$ stetig in z_0 mit: $f(z) = f(z_0) + h(z)\,[z - z_0]$ und $h(z_0) = f'(z_0)$.

f komplex differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig in z_0.

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z)^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^{2k}}{(2k)!} \qquad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}] \\ \sin(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}] \\ \cosh(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}] \\ \sinh(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}] \\ \cosh(z) = \cos(\mathrm{i}\,z) \\ \sinh(z) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}\,z) \end{array}}$$

Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,[z - z_o]^k$ für $|z - z_0| < R$ dem Konvergenzradius, $a_k \in \mathbb{C}$; dann gilt:

1. f ist beliebig oft komplex differenzierbar auf $K_R(z_0)$ mit:
$$f^{(j)}(z) = \sum_{k=j}^{\infty} a_k\, k\,[k-1] \cdots [k-j+1]\,[z - z_0]^{k-j}$$
2. $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

$D \in \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$

1. f heißt **holomorph** in $z_0 \in D$ $\iff$ $\exists$ Umgebung $K_\delta(z_0) \in D$, so dass f <u>in jedem Punkt</u> $z \in K_\delta(z_0)$ komplex differenzierbar ist.
2. f holomorph auf $U \subset D$, U offen $\iff$ f holomorph in jedem Punkt $z \in U$.

$f(x + \mathrm{i}\,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0 \in D$; dann gilt:

1. f komplex differenzierbar in z_0 $\iff$ u, v total differenzierbar in (x_0, y_0) <u>und</u> es gelten die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**: $\begin{array}{l} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{array}$. (C.R. Dgln)
2. f differenzierbar in z_0 $\Rightarrow$ $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + \mathrm{i}\,v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - \mathrm{i}\,u_y(x_0,y_0)$

- f differenzierbar $\Rightarrow$ es gelten die C.R. Dgln. . (notwendige Bedingung)
- u, v stetig differenzierbar und C.R. Dgln. gelten $\Rightarrow$ f komplex differenzierbar. (hinreichende Bedingung)
- $f = u + \mathrm{i}\,v$ holomorph auf $G \subset \mathbb{C}$ (Gebiet) und $u, v \in C^2(G)$ $\Rightarrow$ $\Delta u = \Delta v = 0$ auf G.

$G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und u harmonisch auf G
$\Rightarrow$ $\exists$ harmonische Funktion v auf G, so dass $f(x + \mathrm{i}\,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ holomorph auf G ist.
v heißt dann „die zu u konjugiert harmonische Funktion“.

(Γ, g) glatte Kurve in $\mathbb{C}$, $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $g = \alpha(t) + \mathrm{i}\,\beta(t)$ und $\dot{g}(t) = \dot{\alpha}(t) + \mathrm{i}\,\dot{\beta}(t)$.
$\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j$ stückweise glatte Kurve $\iff$ Γ stetig und Γ_j glatte Kurven $\forall j = 1, \ldots, N$.

(Γ, g) glatte Kurve in $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, f stetig auf G, dann:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(g(t))\cdot\dot{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(g(t))\cdot\dot{g}(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(g(t))\cdot\dot{g}(t))\,\mathrm{d}t.$$

$\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$ stückweise glatte Kurve, dann: $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$.

$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\dot{g}(t)|\,\mathrm{d}t$ heißt Länge der glatten Kurve Γ.

$\mathcal{L}(\Gamma) = \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\Gamma_j)$ heißt Länge der stückweise glatten Kurve $\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$.

$\mathcal{L}(\Gamma)$ ist unabhängig von der zulässigen Parameterdarstellung.

$-\Gamma$ sei die Kurve, die Γ in umgekehrter Richtung durchläuft, dann: $\int_{-\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Für stückweise glatte Kurven, f stetig gilt: $|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z| \le \sup_{z\in\Gamma}(|f(z)|)\,\mathcal{L}(\Gamma)$.

$$\boxed{\oint_{|z-z_0|=R} [z-z_0]^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi\,\mathrm{i} & , n = -1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})}$$

Mit $f(x+\mathrm{i}\,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ und $g = \alpha(t) + \mathrm{i}\,\beta(t)$ ergibt sich:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b [u\dot{\alpha} - v\dot{\beta}]\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b [u\dot{\beta} + v\dot{\alpha}]\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\Gamma v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix} \mathrm{d}\vec{x} + \mathrm{i}\int_\Gamma \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \mathrm{d}\vec{x}$$

$F = \Phi + \mathrm{i}\,\Psi$ mit $\mathrm{grad}(\Phi) = \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$ und $\mathrm{grad}(\Psi) = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$ ist holomorph und heißt „Stammfunktion von f“.

($\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F(z) = f(z)$ auf G)

$G \in \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G, Γ stückweise glatte Kurve in G von z_1 nach z_2, F Stammfunktion von f:

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph in $z_0 \in G$, $g : [a,b] \to G$ ($[a,b] \subset \mathbb{R}$) diff'bar in $t_0 \in (a,b)$ mit $g(t_0) = z_0$:

$$\Rightarrow \exists\,(F \circ g)'(t_0) = F'(z_0)\,g'(t_0)$$

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetige Funktion, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- f besitzt auf G eine Stammfunktion.
- Für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve in G ist $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
- Das komplexe Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ist wegunabhängig.

$\Gamma \subset \mathbb{C}$ stetige, geschlossene Kurve und doppelpunktfrei („Jordan'sche Kurve“), dann besteht das Komplement $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ aus 2 disjunkten, offenen Gebieten.
Eines der Gebiete ist beschränkt (**Innengebiet**), das andere ist unbeschränkt (**Außengebiet**).

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, dann heißt G „einfach zusammenhängend“

$\Leftrightarrow$ Das Innengebiet jeder stetigen, geschlossenen Jordankurve in G liegt in G.

$G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf $G\backslash\{z_0\}$, f stetig in z_0; dann ist für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$: $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf $G\backslash\{z_0\}$ und stetig in z_0, dann: (Riemann'scher Hebbarkeitssatz)

$\Rightarrow$ f ist holomorph auch in z_0.

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$, $r, \delta > 0$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$; sei $z \in K_r(z_0)$ und $\overline{K_\delta(z)} \subset K_r(z_0)$ und h holomorph in $G\backslash\{z\}$

$$\Rightarrow \oint_{|w-z_0|=r} h(w)\,\mathrm{d}w = \oint_{|w-z|=\delta} h(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Cauchy'sche Integralformel:
$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ für $r > 0$, dann gilt für alle $z \in K_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen: $\qquad f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{\mathrm{i}\,t})\,\mathrm{d}t$

Potenzreihe:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G, $0 < r < R \le \infty$, $z_0 \in G : K_R(z_0) \subset G$, dann:

$$\Rightarrow\; f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,[z - z_0]^k \quad \text{, wobei} \quad a_k = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \;: k \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $K_r(z_0)$; f ist auf $K_R(z_0)$ beliebig oft diff'bar.

Ist f zusätzlich beliebig oft diff'bar auf G, $z \in K_r(z_0)$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subset G$, so gilt: $\quad f^{(k)}(z) = \dfrac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \displaystyle\oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w.$

f holomorph auf $G \in \mathbb{C}$, dann:

1. f ist lokal (d.h. auf jedem Kreis in G) als Potenzreihe darstellbar.
2. f hat lokal (d.h. auf jedem Kreis in G) eine Stammfunktion.

$G \in \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G; dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\exists M \subset G$, M offene Menge, die in G einen Häufungspunkt besitzt, so dass $f(z) = g(z) \;:\; \forall z \in M$.
2. $\exists z_0 \in G \;:\; \forall k \in \mathbb{N}_0 \;:\; f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$.
3. $f(z) = g(z) \;:\; \forall z \in G$.

f holomorph auf Gebiet G, $f \not\equiv 0$ auf G $\;\Rightarrow\;$ Nullstellen von f können keinen Häufungspunkt besitzen.

$f : I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$, f beliebig oft diff'bar $\;\Rightarrow\;$ $\exists$ höchstens eine holomorphe Fortsetzung ins Komplexe.
($f' : G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$, $I \subset G$ und $f = f'$ auf I)

$f : G \to \mathbb{C}$ heißt **ganze analytische Funktion** $\;:\Leftrightarrow\; f$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. $\qquad$ ($\Rightarrow$ dort als Potenzreihe darstellbar.)

(Satz von Liouville)
f ganze analytische Funktion, $\exists c > 0, n \in \mathbb{N}_0$ und es gilt $|f(z)| \le c\,[1 + |z|^n] \;:\forall z$
$\Rightarrow\;$ f ist durch ein Polynom höchstens n-ten Grades darstellbar.

I.e. jede beschränkte ganze analytische Funktion ist konstant.

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom n-ten Grades, $n \ge 1$, hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

$0 \le r < R \le \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $K(z_0, r, R) := \{z : r < |z - z_0| < R\}$, $g : K(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph
$\Rightarrow\;$ für alle r_1, r_2 mit $r < r_1 < r_2 < R$ gilt: $\displaystyle\oint_{|w-z_0|=r_1} g(w)\,\mathrm{d}w = \oint_{|w-z_0|=r_2} g(w)\,\mathrm{d}w.$

f holomorph auf $K(z_0,r,R) \quad \Rightarrow \quad \forall z \in K(z_0,r,R) : 0 \le r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R \le \infty$ gilt:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w}_{=:f_2(z)} + \underbrace{\frac{[-1]}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w}_{=:f_1(z)}.$$

(Laurentreihenentwicklung)

$f : K(z_0,r,R) \to \mathbb{C}$ holomorph; dann gilt:

1. $\forall z \in K(z_0,r,R) \,:\, f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,[z-z_0]^k}_{f_2(z)} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\,[z-z_0]^k}_{f_1(z)}$ (absolute Konvergenz)
2. Die Koeffizienten a_k sind eindeutig bestimmt: $a_k = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}}\,\mathrm{d}w \quad ,k \in \mathbb{Z},\ r < \rho < R.$
3. Der Hauptteil f_1 der Laurentreihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{z : |z-z_0| \ge r_1\}$ mit $r_1 < r$ und ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\overline{K_r(z_0)}$.
   f_2 konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{z : |z-z_0| \le r_2\}$ mit $r_2 < R$ und ist holomorph auf $K_R(z_0)$.

Es ist $a_{-1} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|w-z_0|=\rho} f(w)\,\mathrm{d}w \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{|w-z_0|=\rho} f(w)\,\mathrm{d}w = 2\pi\,\mathrm{i}\; a_{i-1}.$

f holomorph in $K_r(z_0)\backslash\{z_0\} \quad \Rightarrow$ „Singularität in z_0“.
Hauptteil zur Klassifikation der Singularität:
$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$; hebbare Singularität $n_{max} = 0$, Pole x-ter Ordung $x = n_{max} < \infty$, wesentliche Singularität $n_{max} = \infty$.

Sei f holomorph in $K_R(z_0)\backslash\{z_0\}$, dann gilt $\forall z \in K_R(z_0)$: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,[z-z_0]^k$.

$\mathrm{Res}\,(f,z_0) = a_{-1}$ heißt „**Residuum** von f in z_0“.

$$\boxed{\begin{array}{c} \oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \pi \\ \oint_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i} \end{array}}$$

$\forall r : 0 < r < R$ gilt: $\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,(f,z_0).$

$z_0 \in \mathbb{C}$, Γ geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$, $z_0 \notin \Gamma$: $\quad \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = n(\Gamma,z_0) \quad , n \in \mathbb{Z}$
heißt „**Umlaufzahl** von Γ bezüglich z_0“.

Residuensatz:
$G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet , $\{z_1,z_2,\dots,z_N\} \subset G$ paarweise verschiedene Stellen von Singularitäten , f holomorph auf $G\backslash\{z_1,z_2,\dots,z_N\}$ und Γ geschlossene, stückweise glatte Kurve in G mit $\{z_1,z_2,\dots,z_N\} \notin \Gamma$; dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{j=1}^{N} n(\Gamma,z_j)\;\mathrm{Res}\,(f,z_j)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \end{array}}$$