Gradient: $F = \mathrm{grad}(u(x,y,z)) = \vec{\nabla} u(x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad F_i = u(x_j)_{,i}$

Divergenz: $f = \mathrm{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad f_i = v_i(x_j)_{,i}$

Rotation: $F = \mathrm{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad F_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$

Laplace: $\Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(u)) = u_{,i,i}$ $\qquad (\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$.

$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}$, und insbesondere dann: $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.

BAC-CAB: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$

Spatprodukt: $(\vec{A} \times \vec{B})\vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A})\vec{B} = (\vec{B} \times \vec{C})\vec{A}$ $\qquad \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \mathrm{d}x = 1$ $\qquad$ KK: $\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$; $\qquad$ ZK: $\delta(\vec{r}) = \frac{\delta\rho\delta r}{2\pi\rho}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - \xi)\ \mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial x} f(x)\Big|_{\xi}$ $\qquad \delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{|\frac{\partial}{\partial x} g(x)|_{x_i}} \delta(x - x_i)$ mit $g(x_i) = 0$.

Integralsätze der Vektoranalysis:

- $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{grad}(u)\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} du = u(\vec{r}_2) - u(\vec{r}_1)$
- Gauß: $\oint_{(V)} \mathrm{d}\vec{f} \vec{A} = \int_V \mathrm{d}V\, \mathrm{div}\left(\vec{A}\right)$ (Fluss)
- Stokes: $\oint_{(F)} \mathrm{d}\vec{r} \vec{A} = \int_F \mathrm{d}\vec{f}\, \mathrm{rot}\left(\vec{A}\right)$ (Zirkulation)
- Green:
  1. $\oint_{(V)} \mathrm{d}\vec{f}\, \psi(\vec{r})\, \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V \left[\psi(\vec{r})\, \Delta\varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\, \vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right]$
  2. $\oint_{(V)} \mathrm{d}\vec{f} \left[\psi(\vec{r})\, \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r})\, \vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right] = \int_V \mathrm{d}V\, [\psi(\vec{r})\, \Delta\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r})\, \Delta\psi(\vec{r})]$

$\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) > 0 \Rightarrow$ Quelle
$\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) < 0 \Rightarrow$ Senke
$\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) = 0 \Rightarrow$ quellenfrei
$\mathrm{rot}\left(\vec{A}\right) = 0 \Rightarrow$ wirbelfrei

Helmholtz'scher Satz:
Das Vektorfeld $\vec{a}$ ist eine eindeutige Lösung, wenn für alle Raumpunkte die Quellen [$\mathrm{div}(\vec{a})$] und Wirbel [$\mathrm{rot}(\vec{a})$] bekannt sind.

Maxwellsche Gleichungen (mikroskopisch)

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) &= 0 \\ \mathrm{rot}\left(\vec{B}(\vec{r},t)\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) &= \mu_0\, \vec{\jmath}(\vec{r},t) \\ \varepsilon_0\, \mathrm{div}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right) &= \rho(\vec{r},t) \\ \mathrm{div}\left(\vec{B}(\vec{r},t)\right) &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{\jmath}$ - Stromdichte; c - Lichtgeschwindigkeit; ρ - Ladungsdichte.

Kontinuitätsgleichung (lokal an $\vec{r}$ und global in V):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \mathrm{div}(\vec{\jmath}(\vec{r},t)) = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} + I(t) = 0$$

Mit $\underbrace{\vec{D}(\vec{r},t)}_{\text{dielektr. Verschiebung}} = \varepsilon_0 \underbrace{\vec{E}(\vec{r},t)}_{\text{elektr. Feldstärke}} + \underbrace{\vec{P}(\vec{r},t)}_{\text{Polarisation}}$ und $\underbrace{\vec{H}(\vec{r},t)}_{\text{magnet. Feldstärke}} = \frac{1}{\mu_0}[\underbrace{\vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{magnet. Induktion}} - \underbrace{\vec{M}(\vec{r},t)}_{\text{Magnetisierung}}]$ ergibt sich:

Maxwellsche Gleichungen (makroskopisch)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) &= 0 & \oint_{\partial A} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{f} \\
\operatorname{rot}\left(\vec{H}(\vec{r},t)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) &= \tilde{\vec{\jmath}}(\vec{r},t) & \oint_{\partial A} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} &= \tilde{I} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{f} \\
\operatorname{div}\left(\vec{D}(\vec{r},t)\right) &= \tilde{\rho}(\vec{r},t) & \oint_{\partial V} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{f} &= \tilde{Q} \\
\operatorname{div}\left(\vec{B}(\vec{r},t)\right) &= 0 & \oint_{\partial V} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{f} &= 0
\end{aligned}$$

$\tilde{\vec{\jmath}}$ - freie Stromdichte; $\tilde{\rho}$ - freie Ladungsdichte.

Coulomb-Kraft: $\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_i \sum_{j\neq i} q_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$.

Entsprechend: $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$. $\vec{F} \sim \vec{E} \sim \frac{1}{r^2}$

grundlegende (SI-) **Einheiten**: m, kg, s, A

$1\mathrm{V} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A\,s^3}}$ $[\vec{E}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{A\,s^3}}$ $[\vec{B}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A\,s^2}}$ $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\,s}$

$1\,\mathrm{F} = \frac{\mathrm{A^2\,s^4}}{\mathrm{kg\,m^2}}$ $1\,\mathrm{H} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A^2\,s^2}}$ $1\,\Omega = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A^2\,s^3}}$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$ $\varepsilon_0 = 8.854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}$ $c^2 = \frac{1}{\mu_0\,\varepsilon_0}$

Elektrostatik:

Potenzial: $\vec{E} = -\operatorname{grad}(\varphi(\vec{r}))$, mit $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ (Poisson'sches - Integral)

Oder: $\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\vec{r}\,'$ „natürliche Randbedingung“: $\varphi(\vec{r}) \xrightarrow{|\vec{r}|\to\infty} 0$.

Kraft und Arbeit: $\vec{F}(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r})$, $W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = q[\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)]$.

Daraus folgt: $\oint_{\partial A} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{E}(\vec{r})\right) = 0$, also:

Das statische elektrische Feld ist wirbelfrei; dessen Quellen sind elektrische Ladungen.

An geladenen Flächen gilt: $E_{2n}(\vec{r}) - E_{1n}(\vec{r}) = \frac{\eta(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, $E_{1t}(\vec{r}) = E_{2t}(\vec{r})$

an Grenzfläche bei $\vec{r}$ mit Flächenladungsdichte η; E_n - normal, E_t - tangential zur Fläche.

Poissongleichung: $\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$; Laplace-Gleichung ($\rho = 0$): $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$

Greensche Funktion: $\hat{L}(y(\vec{r})) = s(\vec{r})$, mit $\boxed{\hat{L}(G_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}$ und $y = \int_V \mathrm{d}V'\; G_0(\vec{r}, \vec{r}\,')\; s(\vec{r})$;

dabei ist $\hat{L}$ ein beliebiger linearer Differentialoperator, $s(\vec{r})$ eine beliebige Inhomogenität.

Lösung von Potenzialproblemen: (im homogenen $\mathbb{R}^3$ für Laplace: $G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$)

- Lösung der Poisson-Gleichung in jedem Gebiet mit natürlichen Randbedingungen
- Anschließen der Lösungen an den Grenzflächen ($\Rightarrow$ Übergangsbedingungen)
- Normalenableitung: $E_n = \vec{E}\;\vec{e}_n = -\operatorname{grad}(\varphi(\vec{r}))\;\vec{e}_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$:

$E_{n2}(\vec{r}) - E_{n1}(\vec{r}) = -\frac{\partial\varphi_2(\vec{r})}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_1(\vec{r})}{\partial n} = \frac{\eta(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ $\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r})$, da $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}(\varphi(\vec{r}))$.

$E_{t2}(\vec{r}) - E_{t1}(\vec{r}) = 0$

Multipolentwicklung:

$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{Q_{k_1k_2...k_l}}{l!\, r^{2l+1}} x_{k_1} x_{k_2} ... x_{k_l}$ mit den Multipolmomenten (Tensoren der Stufe l):

$Q_{k_1k_2...k_l} = 4\pi\varepsilon_0(-1)^l \int_{V_\rho} dV' \rho(\vec{r}\,')\, r'^{2l+1}\, G_{0,k_1,k_2...,k_l}(\vec{r}\,')$.

Diese Entwicklung (Taylor) der (rauminvarianten) Green'schen Funktion entkoppelt Quelleigenschaften und Aufpunkt, ist nur für endliche Ladungsverteilungen gültig und gilt erst ab einem gewissen Abstand (Konvergenzradius), erste Glieder:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{Q}_{\text{Monopolmoment (l=0)}} \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\vec{p}}_{\text{Dipolmoment (l=1)}} \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{D_{ij}}_{\text{Quadrupolmoment (l=2)}} \frac{x_i x_j}{2r^5} + \; ...$$

Elektrostatische Energie:

1. „innere Wechselwirkungsenergie" (Ladungen bauen selbst ein Feld auf):
   - diskret: $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1;\, j\neq i}^{N} \dfrac{Q_i\, Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \varphi(\vec{r}_i)$
   - kontinuierlich: $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_\rho} \mathrm{d}V \int_{V_\rho} \mathrm{d}V' \dfrac{\rho(\vec{r})\, \rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \dfrac{1}{2} \int_{V_\rho} dV \varphi(\vec{r})\, \rho(\vec{r})$
   - Feldenergie: $W = \dfrac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_\infty} [\vec{E}(\vec{r})]^2 \,\mathrm{d}V$ (über den ganzen Raum V_∞ muss $\vec{E}$ bekannt sein!)
2. „äußere Wechselwirkungsenergie" (Ladungen in vorgegebenes äußeres Feld):
   - ρ_a Felderzeugend ($\to \varphi_a$): $W = \int_{V_1} \mathrm{d}V \rho_1(\vec{r})\, \varphi_a(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_a} \mathrm{d}V'\, \mathrm{d}V \dfrac{\rho_1(\vec{r})\, \rho_a(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

Energie einer eng begrenzten Ladungsverteilung in festem äußeren $\vec{E}_a$-Feld:

$$W(\vec{r}) \approx Q_{1\vec{r}}\, \varphi_a(\vec{r}) - \vec{p}_{1\vec{r}}\, \vec{E}_a(\vec{r}) - \tfrac{1}{6} D_{1\vec{r}ij}\, E_{ai},_j(\vec{r})$$

$\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}_{\vec{r}}(W(\vec{r}))$, $\vec{F}$ Kraft, W Energie.

Im Feld $\vec{E}_a$: $F_{\text{Monopolm.}} = Q_{1\vec{r}}\vec{E}_a(\vec{r})$, $F_{\text{Dipolm.}} = (\vec{p}\,\mathrm{grad})\vec{E}_a(\vec{r})$

Im auf V' homogenen Feld $\vec{E}_a$: $\vec{M} = \vec{p}_{1\vec{r}} \times \vec{E}_a(\vec{r})$; induzierter Dipol: $W_D = -\frac{1}{2}\vec{p}\,\vec{E}_a$

Leiter (in Elektrostatik):

- innen feldfrei: $\vec{E}(\vec{r}) = 0$, $\varphi(\vec{r}) = const.$ und
- für die Äquipotenzialflächen an ∂V gilt: $\eta(\vec{r}) = \varepsilon_0 E_{a\vec{n}} = -\varepsilon_0 \left.\dfrac{\partial\varphi_a(\vec{r})}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial V}$ und $E_{a\vec{t}} = 0$. (η - Oberflächenladungsdichte)
- Beschreibung:
  - „empirisch":
    beliebige Ladungsverteilung im Vakuum und dann Leiter als dessen Äquipotenzialflächen
  - als Randwertaufgabe:
    Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$, Geometrie der Leiter, Randwerte seien bekannt und dazu
    a) φ_i auf ∂V_i ($\to$ Dirichletproblem) oder
    b) Q_i auf ∂V_i,

    für b) **Rückführung** auf a) über Kapazitätskoeffizienten C_{ij}:

    Es gilt: $Q_j = Q_j^{ind} + \sum_i C_{ij}\, \varphi_i$ mit $Q_j^{ind} = -\varepsilon_0 \int_{\partial V_j} \mathrm{d}f \dfrac{\partial\varphi_\rho(\vec{r})}{\partial\vec{n}_j} = \int_{\partial V_j} \mathrm{d}f\, \eta^{ind}(\vec{r})$ und

$$C_{ij} = C_{ji} = -\varepsilon_0 \int_{\partial V_j} \mathrm{d}f \frac{\partial\Gamma_i(\vec{r})}{\partial\vec{n}_j} = {\varepsilon_0}^2 \int_{\partial V_j} \mathrm{d}f \int_{\partial V_i} \mathrm{d}f' \frac{\partial^2 G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial\vec{n}_i'\,\partial\vec{n}_j}$$

Daraus folgt: $\varphi_i = \sum_j C_{ij}^{-1}\,(Q_j - Q_j^{ind})$!

Lösung für das **Potenzial** mit Hilfe Green'scher Funktionen:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_\rho(\vec{r}) + \sum_i \varphi_i\,\Gamma_i(\vec{r}) \qquad \text{, mit } \Gamma_i(\vec{r}) = -\int_{\partial V_i} \mathrm{d}f'\varepsilon_0 \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial \vec{n}\,'}$$

$$\text{und } \varphi_\rho(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V'\,G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,').$$

Bestimmung der **Green'schen Funktion** ($\hat{=}$ dem Problem einer Punktladung in der Geometrie!):

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G_0(\vec{r},\vec{r}\,') + F(\vec{r},\vec{r}\,')$, mit $\Delta F(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$ und richtigen Randbedingungen:

$G(\vec{r},\vec{r}\,')|_{\vec{r}\,'\in\partial V_i} \stackrel{!}{=} 0$ und $-\varepsilon_0\Delta' G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$. ($\sim$ Spiegelladungen)

Energie: $W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}V\,\rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2}\sum_i \varphi\,Q_i$ mit

α) φ_i vorgegeben, dann: $Q_i = Q_i^{\,\mathrm{ind}} + \sum_j \varphi_j C_{ij}$

β) Q_i vorgegeben, dann: $\varphi_i = \sum_j C_{ij}^{-1}(Q_j - Q_j^{\,\mathrm{ind}})$

Kraft: $\vec{F} = -\,\mathrm{grad}(W(\vec{r}))$.

Dielektrika:

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen gelten weiterhin; zur makroskopischen Beschreibung Mittelung über kleine Volumina ($\sim 10^{-6}\,\mathrm{cm}^3$) mit Polarisation in Dielektrika:

$<\vec{E}(\vec{r})> = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \vec{E}(\vec{r}+\vec{\overline{r}})\,\mathrm{d}\overline{V}$

Dipoldichte: $\vec{P}_D(\vec{r}) = \sum_i \vec{p}_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$, **Polarisation** (gemittelt): $\vec{P}(\vec{r}\,') = <\vec{P}_D(\vec{r}\,')> = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \mathrm{d}\overline{V}\,\vec{P}_D(\vec{r}\,'+\vec{\overline{r}})$,

und somit:

$$<\varphi_D(\vec{r})> = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V\vec{P}(\vec{r}\,')\;\mathrm{grad}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\,\frac{\eta_{\mathrm{Pol}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V'\frac{\rho_{\mathrm{Pol}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

, mit der Oberflächenladungsdichte: $\eta_{\mathrm{Pol}}(\vec{r}\,') = \vec{P}(\vec{r}\,')\,\vec{e}_n$,und der Raumladungsdichte: $\rho_{\mathrm{Pol}}(\vec{r}\,') = -\,\mathrm{div}\Big(\vec{P}(\vec{r}\,')\Big)$.

Die Polarisationsladung ist: $Q_P = 0\,\mathrm{C}$.

Die **dielektrische Verschiebung** ergibt sich zu: $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$.

Unter der Annahme eines proportionalen Zusammenhangs von $\vec{P}$ und $\vec{E}$: $\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0\,\chi(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r})$, mit der Suszeptibilität $\chi(\vec{r})$, ergibt sich: $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\,\varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r})$ mit der dielektrischen Funktion $\varepsilon(\vec{r}) = 1 + \chi(\vec{r})$.

An Grenzflächen dielektrischer Medien (ohne externe Oberflächenladungen) gilt:

- $D_{na}(\vec{r}) = D_{ni}(\vec{r})$ (Stetigkeit der Normalkomponente des $\vec{D}$-Feldes) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon_a\,E_{na}(\vec{r}) = \varepsilon_i\,E_{ni}(\vec{r})$ (Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes springt),
- $\frac{D_{ta}(\vec{r})}{\varepsilon_a} = \frac{D_{ti}(\vec{r})}{\varepsilon_i}$ (Tangentialkomponente des $\vec{D}$-Feldes springt) $\Leftrightarrow$ $E_{ta}(\vec{r}) = E_{ti}(\vec{r})$ (Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes).

Für das Potenzial in allgemein inhomogenen Dielektrika gilt: $\Delta\varphi(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}\,\mathrm{grad}(\varepsilon(\vec{r}))\,\mathrm{grad}(\varphi(\vec{r})) = -\frac{\rho_{\mathrm{ext}}(\vec{r})}{\varepsilon_0\,\varepsilon(\vec{r})}$,

was sich für stückweise konstante $\varepsilon(\vec{r})$ oder $\vec{E}(\vec{r})\perp\mathrm{grad}(\varepsilon(\vec{r}))$ vereinfacht zu: $\Delta\varphi_i(\vec{r}) = -\frac{\rho_{\mathrm{ext}\,i}(\vec{r})}{\varepsilon_i(\vec{r})\,\varepsilon_0}$.

Mit der Green'schen Funktion lässt es sich wie folgt darstellen: $\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V'\, \rho_{\text{ext}}(\vec{r}\,')\, G(\vec{r},\vec{r}\,')$;

mit G_i und $\varepsilon_i \frac{\partial G_i}{\partial n}$ stetig, sowie (wenn nur Ladung in „i"): $\begin{cases} -\varepsilon_i\, \varepsilon_0\, \Delta G_i(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \\ -\varepsilon_j\, \varepsilon_0\, \Delta G_j(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 & , j \neq i \end{cases}$.

Für das innere elektrische Feld einer homogenen Kugel im homogenen elektrischen äußeren Feld gilt:

$$E_i = E_a + \frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{3\varepsilon_a}{2\varepsilon_a+\varepsilon_i} E_a \qquad (\rightarrow \text{Feldüberhöhung für } \varepsilon_i < \varepsilon_a)$$

Clausius-Mossotti-Gleichung: $\chi = \dfrac{N\alpha_{\text{at}}}{1 - \frac{N\alpha_{\text{at}}}{3}}$;

wobei α_{at} die atomare Polarisierbarkeit der Atome und N die Volumendichte selbiger ist (Ansatz: betrachtetes Atom in Vakuum-Kugel $\rightarrow$ Feldüberhöhung an ihm).

Energie in Dielektrika: $W = \dfrac{1}{2}[\varepsilon_0 \displaystyle\int_{V_\infty} \mathrm{d}V\, [\vec{E}(\vec{r})]^2 + \int_{V_\infty} \mathrm{d}V \vec{P}(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r})] = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \mathrm{d}V \vec{E}(\vec{r})\, \vec{D}(\vec{r})$

Dies vereinfacht sich für lineare, isotrope Medien zu: $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{V_\infty} \mathrm{d}V\, \varepsilon(\vec{r})\, \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \mathrm{d}V\, \varphi(\vec{r})\, \rho_{\text{ext}}(\vec{r})$;
wobei $\varphi(\vec{r})$ von ρ_{ext}, ρ_{pol} erzeugt.
Die Dipole zu erzeugen und dann ins Feld zu bringen hebt sich dabei energetisch gerade auf.

Kraftdichte auf Dielektrika: $\vec{f}(\vec{r}) = \underbrace{\rho_{\text{ext}}(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r})}_{\text{Kraftdichte auf ext. Ladungen}} - \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\, \vec{E}^2(\vec{r})\, \text{grad}(\varepsilon(\vec{r}))}_{\text{Kraftdichte auf Polarisationsladungen}}$.

$\Leftrightarrow f_i = T_{ij},_j$ mit $T_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E_k D_k$; man schreibt auch: $\vec{f}(\vec{r}) = \text{div}\left(\hat{T}(\vec{r})\right)$ mit dem symmetrischen

Maxwell'schen Spannungstensor $\hat{T} = \begin{bmatrix} E_x D_x - \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} \end{bmatrix}$, $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_i$.

Magnetostatik:

Stromdichte: $\vec{\jmath} = \sigma\, \vec{E}(\vec{r})$; $\sigma-$ Leitfähigkeit. $\Rightarrow$ mikroskopisch: $I = \sigma \frac{A}{l} V = \frac{V}{R}$ (Ohm'sches Gesetz).
A - Querschnitt, l - Länge

Kontinuitätsgleichung: $\dot{Q}(t) + I(t) = 0$ (makroskopisch) $\Leftrightarrow \dot{\rho}(\vec{r},t) + \text{div}(\vec{\jmath}(\vec{r},t)) = 0$ (mikroskopisch)
(Ladungserhaltung!)

$$\boxed{\begin{gathered} \text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{A}\right)\right) = \text{grad}\left(\text{div}\left(\vec{A}\right)\right) - \Delta\vec{A} \\ \text{div}(\text{grad}(s)) = \Delta s \end{gathered}}$$

Ampère'sches Gesetz: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \displaystyle\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{I_1\, \mathrm{d}\vec{s}_1 \times [I_2\, \mathrm{d}\vec{s}_2 \times (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)]}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|^3}$

; die magn. Kraft von 2 auf 1, mit $F_{\text{magn.}} \sim \frac{1}{c^2} F_{\text{elektr.}}$, $c^2 = \frac{1}{\mu_0\, \varepsilon_0}$ und $\mathrm{d}\vec{s}_1$, $\mathrm{d}\vec{s}_2$ den Richtungen der Ströme I_1, I_2.

Biot-Savart'sches Gesetz: $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_V \mathrm{d}V' \left[\vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$ (magnetische Induktion)

Vektor**potenzial**: $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\left(\vec{A}(\vec{r})\right)$

mit $\vec{A} = \vec{A}\,' + \text{grad}(f(\vec{r}))$, wobei $\text{div}\left(\vec{A}(\vec{r})\right) = 0$ ($\Rightarrow \text{div}\left(\vec{A}\,'(\vec{r})\right) = -\Delta f(\vec{r})$ - „Eichtransformation"), dann

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\, \vec{\jmath}(\vec{r}) \quad \text{für jede Komponente.}$$

Natürliche Randbedingung: $\lim\limits_{|\vec{r}|\to\infty} \vec{A}(\vec{r}) = 0$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V'\, G_0(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \quad \text{und} \quad G_0(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Multipolentwicklung:

$$A_i(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{{j^i}_{k_1k_2\dots k_l}}{l!\,r^{2l+1}}x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_l} \quad \text{mit} \quad {j^i}_{k_1k_2\dots k_l} = \frac{4\pi}{\mu_0}(-1)^l\int_V \mathrm{d}V'\, j_i(\vec r\,')\, r'^{2l+1}\, G_{0,k_1,k_2\dots,k_l}(\vec r\,');$$

wobei j_i die i-te Komponente von $\vec\jmath$ und A_i die i-te Komponente von $\vec A$ ist.

Da $F_{\text{elektr.}} \sim c^2 F_{\text{magn.}}$ gilt, ist $Q_{k_1\dots k_i} \sim {j^i}_{k_1\dots k_{i-1}}$ von der Wirkung her.

${j^i}_0 = 0$ ($\Rightarrow$ keine magnetischen Monopole), daher: $\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\vec m}_{\text{Dipolmoment (l=1)}} \times \frac{\vec r}{r^3} + \quad \dots$, mit $\vec m = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}V'\,\vec r\,' \times \vec\jmath(\vec r\,')$

Sei I der Strom entlang des Randes einer Fläche A, so gilt: $|\vec m| = A\cdot I$. (Ringstrom = Dipolflächendichte)

$$\Rightarrow \vec B(\vec r) = \operatorname{rot}\Big(\vec A(\vec r)\Big) = \frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\vec m\times\vec r}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\,\vec r\,(\vec r\,\vec m) - \vec m\, r^2}{r^5}$$

In Materie:

Mittlere Dipoldichte (Magnetisierung): $\vec M(\vec r) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\mathrm{d}V'\,\vec M_{\text{mol}}(\vec r + \vec{\bar r})$

mit der molaren Dipoldichte $\vec M_{\text{mol}}(\vec r) = \sum_i \vec m^{(i)}\,\delta(\vec r - \vec r_i)$.

Molekulare Ströme: $\mu_0\,\vec\jmath_{\text{mol}}(\vec r) = \operatorname{rot}\Big(\vec M(\vec r)\Big)$.

Magnetfeld (in Materie): $\vec H(\vec r) = \frac{1}{\mu_0}[\vec B(\vec r) - \vec M(\vec r)]$ ($\vec B$-Feld $\widehat{=}$ Vakuumfeld)

Die Maxwellgleichung $\operatorname{div}\Big(\vec B(\vec r)\Big) = 0$ lässt sich damit äquivalent formulieren: $\operatorname{div}\Big(\vec H(\vec r)\Big) = -\operatorname{div}\Big(\vec M(\vec r)\Big)$.

In **Dia-** ($\chi_m < 0$) und **Paramagnetischen** ($0 < \chi_m \ll 1$) Stoffen:

χ_m - magnetische Suszeptibilität, $\mu = 1 + \chi_m$ - Permeabilität, $\vec H(\vec r) = \frac{1}{\mu_0\,\mu}\vec B(\vec r)$.

$\Rightarrow$ Vektorpotenzial: $\Delta\vec A(\vec r) = -\mu_0\,\mu\,\vec\jmath_{\text{makr.}}(\vec r)$.

An **Grenzflächen** magnetischer Medien gilt:

- $\mu_a\,H_{na}(\vec r) = \mu_i\,H_{ni}(\vec r)$ (Unstetigkeit der Normalkomponente des $\vec H$-Feldes) $\Leftrightarrow$ $B_{na}(\vec r) = B_{ni}(\vec r)$ (Stetigkeit der Normalkomponente des $\vec B$-Feldes),
- $H_{ta}(\vec r) - H_{ti}(\vec r) = [\vec\jmath_{\text{makr.}}]_{\text{OF}}$ (Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec H$-Feldes ohne Oberflächenstrom) $\Leftrightarrow$ $\frac{B_{ta}(\vec r)}{\mu_0\,\mu_a} - \frac{E_{ti}(\vec r)}{\mu_0\,\mu_i} = [\vec\jmath_{\text{makr.}}]_{\text{OF}}$ (Unstetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec B$-Feldes ohne Oberflächenstrom).

Ohne Strom, mit vorgegebener Magnetisierung: $\vec H(\vec r) = -\operatorname{grad}(\varphi_m(\vec r))$, mit

$$\varphi_m(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}V'\,\frac{\operatorname{div}_{\vec r\,'}(\vec M(\vec r\,'))}{|\vec r - \vec r\,'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec f\,'\,\frac{\vec M(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}.$$

Energie: $W = \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\vec B(\vec r)\,\vec H(\vec r)\,\mathrm{d}V = \int_{V_j}\mathrm{d}V\,\vec A(\vec r)\,\vec\jmath_{\text{makr.}}(\vec r) = \frac{\mu_0\,\mu}{8\pi}\int_{V_j}\mathrm{d}V\int_{V_j}\mathrm{d}V'\,\frac{\vec\jmath_{\text{makr.}}(\vec r\,')\,\vec\jmath_{\text{makr.}}(\vec r)}{|\vec r - \vec r\,'|}$.

Speziell für <u>dünne Leiter im Vakuum</u>:

Induktionskoeffizienten - $L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial F_i}\int_{\partial F_k}\frac{\mathrm{d}\vec s_i\,\mathrm{d}\vec s_k}{|\vec s_i - \vec s_k|}$, magn. Fluss - $\Phi_k = \int_{F_k}\mathrm{d}\vec f_k\,\vec B(\vec r_k) = \sum_i L_{ik} I_i$

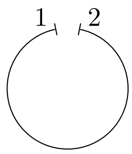
$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\sum_{ik} L_{ik} I_i\, I_k = \frac{1}{2}\sum_k I_k\Phi_k.$$

Kraft auf eine eng begrenzte Stromverteilung im äußeren Magnetfeld in erster Näherung nach Lorentz ($\vec{f}(\vec{r}) = \vec{\jmath}(\vec{r}) \times \vec{B}_a(\vec{r})$):
$\vec{F}(\vec{r}) \approx \operatorname{grad}\Big(\vec{m}_{\vec{r}}\, \vec{B}_a(\vec{r})\Big)$, mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}_{\vec{r}}$.
$\Leftrightarrow$ Energie: $W = -\vec{m}_{\vec{r}}\, \vec{B}_a(\vec{r})$, Drehmoment: $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{m}_{\vec{r}} \times \vec{B}_a(\vec{r})$.

Der **magnetische Spannungstensor**: $\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{div}\Big(\hat{T}^{\text{magn}}(\vec{r})\Big)$
$\Leftrightarrow \; f_i = T_{ik}^{\text{magn}},_k \quad$ mit $\quad T_{ik}^{\text{magn}} = B_i H_k - \delta_{ik} w_{\text{magn}} \quad$ und $\quad w_{\text{magn}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r})\, \vec{B}(\vec{r})$.

Langsame Dynamik ($\sim 50\,\text{Hz}$):

Lenz'sche Regel: $\underbrace{\int_{\partial F} \vec{E}(\vec{r},t)\, \mathrm{d}\vec{f}}_{U_{\text{ind}}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_F \vec{B}(\vec{r},t)\, \mathrm{d}\vec{f}}_{\Phi_{\text{magn}}}$ (Erzeugte Felder wirken entgegen Erzeugung.)



Elektromotorische Kraft: Spannung in einer unterbrochenen, widerstandslosen Leiterschleife: $U_{\text{ind}} = U_{12}$.

In bewegten Leitern in äußerem Magnetfeld gilt: $\vec{E} = \vec{E}\,' + \vec{v} \times \vec{B}$ und $\vec{B} = \vec{B}\,'$
($\vec{E}\,'$ - ruhendes System, $\vec{E}$ - bewegtes System; dann gelten weiterhihn die MWG mit den neuen Feldern).

Potenzialgleichungen:
$$\begin{aligned} -\varepsilon_0\, \Delta\varphi(\vec{r},t) &= \rho(\vec{r},t) \\ -\tfrac{1}{\mu_0}\Delta\vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{\jmath}(\vec{r},t) \end{aligned}$$
mit $\vec{B} = \operatorname{rot}\Big(\vec{A}\Big)$ und $\vec{E} = -\operatorname{grad}(\varphi)$.

Langsame Felder: $|\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}| \ll |\vec{\jmath}| \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{\omega\, \varepsilon_0\, \varepsilon}{\sigma}\right| \ll 1$.
Dabei gelten eigentlich die Kontinuitätsgleichung ($\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\jmath)$) und die MWG ($\vec{\jmath} = \operatorname{rot}\Big(\vec{H}\Big) \Rightarrow \operatorname{div}(\jmath) = 0$); im Mittel tun sie dies auch, wenn $\rho(t) = \rho_0\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ mit der Relaxationszeit $\tau = \frac{\varepsilon_0\, \varepsilon}{\sigma} \ll 1$.

Kirchhoff:

1. Knotensatz: $\sum_k I_k(t) = 0 \;: \forall t$
2. Maschensatz: $\int_{C_k'} \mathrm{d}\vec{r}\, \vec{E}(\vec{r},t) + \underbrace{\sum_i L_{ki} \frac{\partial}{\partial t} I_i(t)}_{\text{induziert}} = U_k^{\text{ext}}(t)$

$\Rightarrow$ Widerstand: $U_R(t) = I(t)\, R$. Kondensator: $U_C(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$. Spule: $U_L = L\, \dfrac{\partial I(t)}{\partial t}$.

Wechselstrom in Schwingkreis:

komplexe Größen: $\underbrace{\tilde{R}}_{\text{Scheinwiderstand}} = \underbrace{R}_{\text{Wirkwiderstand}} + \underbrace{\mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}}_{\text{Blindwiderstand}} = |\tilde{R}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi}$, $\tilde{U}_0 = |\tilde{U}_0|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_U}$, $\tilde{I}_0 = |\tilde{I}_0|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_I}$;

Maschensatz: $R\, I(t) + \dfrac{Q(t)}{C} + L\dfrac{\partial I(t)}{\partial t} = U_{\text{ext}}(t)$

im eingeschwungenen Zustand: $U_{\text{ext}}(t) = \operatorname{Re}(\tilde{U}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$, $I(t) = \operatorname{Re}(\tilde{I}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$ (messbar)
$$\tilde{U}_0 = \tilde{R}\tilde{I}_0 \;\Leftrightarrow\; |\tilde{U}_0| = |\tilde{R}|\, |\tilde{I}_0| \;\wedge\; \Delta\Phi = \Phi_U - \Phi_I.$$

Leistung (über Periode gemittelt): $\overline{N} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, \operatorname{Re}(\tilde{U}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})\, \operatorname{Re}(\tilde{I}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = \frac{1}{2}|\tilde{U}_0||\tilde{I}_0|\cos(\Delta\Phi)$
Blindleistung: $\overline{N}_B = \frac{1}{2}\, |\tilde{U}_0|\, |\tilde{I}_0| \sin(\Delta\Phi)$

Energiesatz: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[\dfrac{L}{2}I^2(t)\right]}_{\text{magn. Energie}} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[\dfrac{CU^2(t)}{2}\right]}_{\text{elektr. Energie}} + \underbrace{RI^2(t)}_{\text{Joulsche Wärme}} = \underbrace{U_{\mathrm{ext}}I(t)}_{\text{Leistung der Quelle}}$.

Dynamik:

Ladungen: $\rho_{\mathrm{ges}}(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{ext}}(\vec{r},t) + \rho_{\mathrm{Pol}}(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{ext}}(\vec{r},t) - \operatorname{div}\left(\vec{P}(\vec{r},t)\right)$

Ströme: $\vec{\jmath}_{\mathrm{ges}}(\vec{r},t) = \vec{\jmath}_{\mathrm{makr}}(\vec{r},t) + \vec{\jmath}_{\mathrm{mol}}(\vec{r},t) + \vec{\jmath}_{\mathrm{Pol}}(\vec{r},t) = \vec{\jmath}_{\mathrm{makr}}(\vec{r},t) + \dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\left(\vec{M}(\vec{r},t)\right) + \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{P}(\vec{r},t).$

Polarisationsstromdichte: $\vec{\jmath}_{\mathrm{Pol}}(\vec{r},t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{P}(\vec{r},t)$.

Maxwellsche Gleichungen (mikroskopisch | in Materie)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right) + \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) &= 0 \\
\operatorname{div}\left(\vec{B}(\vec{r},t)\right) &= 0 \\
\operatorname{rot}\left(\vec{B}(\vec{r},t)\right) - \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) &= \mu_0\,\vec{\jmath}(\vec{r},t) \\
\varepsilon_0\operatorname{div}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right) &= \rho(\vec{r},t)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\right) + \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) &= 0 \\
\operatorname{div}\left(\vec{B}(\vec{r},t)\right) &= 0 \\
\operatorname{rot}\left(\vec{H}(\vec{r},t)\right) - \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) &= \vec{\jmath}_{\mathrm{makr}}(\vec{r},t) \\
\operatorname{div}\left(\vec{D}(\vec{r},t)\right) &= \rho_{\mathrm{ext}}(\vec{r},t)
\end{aligned}
$$

, mit $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{B} - \vec{M}]$; dabei $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E},\vec{B})$, $\vec{M} = \vec{M}(\vec{E},\vec{B})$, $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}(\vec{E},\vec{B})$.

Fouriertransformation: $X(\vec{r},t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\overline{X}(\vec{r},\omega)\ \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}\omega$ und $\overline{X}(\vec{r},\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}X(\vec{r},t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}t$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}\omega = \delta(t)}$$

Damit ergibt sich für hohe Frequenzen ω und lineare, isotrope Medien:
$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}(\vec{r},t)$, $\vec{M}(\vec{r},t) = 0$ (bei hohen Frequenzen kein Magnetismus induziert).

$\vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\ \underbrace{R(\vec{r},t')}_{\text{Response}}\ \vec{E}(\vec{r},\underbrace{t-t'}_{\text{Gedächtnis}})$ mit $R(\vec{r},t') = 0\,;t' < 0$

$\Leftrightarrow\ \overline{\vec{P}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\,\chi(\vec{r},\omega)\,\overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$ mit $\chi(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\,R(\vec{r},t')\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}$;

also: $\overline{\vec{D}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\,\varepsilon(\vec{r},\omega)\,\overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$, mit $\varepsilon(\vec{r},\omega) = 1 + \chi(\vec{r},\omega)$.

analog: $\overline{\vec{\jmath}}(\vec{r},\omega) = \sigma\,\overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$.

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{E}(\vec{r},t)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{i}\omega\,\overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega)\quad\text{(natürliche Randbedingungen!)}}$$

Maxwellsche Gleichungen (im Fourierraum)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega)\right) - \mathrm{i}\omega\,\mu_0\,\overline{\vec{H}}(\vec{r},\omega) &= 0 \\
\operatorname{rot}\left(\overline{\vec{H}}(\vec{r},\omega)\right) + \mathrm{i}\omega\,\varepsilon_0\left[\varepsilon(\vec{r},\omega) + \mathrm{i}\frac{\sigma(\vec{r},\omega)}{\omega\,\varepsilon_0}\right]\overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega) &= \overline{\vec{\jmath}}_{\mathrm{conv}}(\vec{r},\omega) \\
\varepsilon_0\operatorname{div}\left(\varepsilon(\vec{r},\omega)\ \overline{\vec{E}}(\vec{r},\omega)\right) &= \overline{\rho}_{\mathrm{ext}}(\vec{r},\omega) \\
\operatorname{div}\left(\overline{\vec{H}}(\vec{r},\omega)\right) &= 0
\end{aligned}
$$

An Materialübergängen gilt:
- $\overline{D}_n^{(2)}(\vec{r},\omega) - \overline{D}_n^{(1)}(\vec{r},\omega) = \overline{\eta}_{\text{OF}}(\vec{r},\omega)$ und $\overline{B}_n^{(2)}(\vec{r},\omega) - \overline{B}_n^{(1)}(\vec{r},\omega) = 0$;
- $\overline{E}_t^{(2)}(\vec{r},\omega) - \overline{E}_t^{(1)}(\vec{r},\omega) = 0$ und $\overline{H}_t^{(2)}(\vec{r},\omega) - \overline{H}_t^{(1)}(\vec{r},\omega) = \overline{\jmath}_{\text{OF}}(\vec{r},\omega)$.

Einführung von **Potenzialen**:

1. $\vec{B}(\vec{r},t) = \text{rot}\Big(\vec{A}(\vec{r},t)\Big)$, wobei Eichfreiheit: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}\,'(\vec{r},t) + \text{grad}(f(\vec{r},t))$;
2. $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) - \text{grad}(\varphi(\vec{r},t))$, wobei Eichfreiheit: $\varphi(\vec{r},t) = \varphi'(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r},t)$.

$$\boxed{\text{d'Alembert-Operator: } \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich mit ihnen dann:

$$\begin{aligned} \Box\vec{A}(\vec{r},t) - \text{grad}\left(\text{div}\Big(\vec{A}(\vec{r},t)\Big) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t)\right) &= -\mu_0\,\vec{\jmath}_{\text{makr}}(\vec{r},t) \\ \Delta\varphi(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\Big(\vec{A}(\vec{r},t)\Big) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Lorenz-Eichung: $$\text{div}\Big(\vec{A}(\vec{r},t)\Big) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t) \stackrel{!}{=} 0$$ (Ludvig Lorenz)

$$\Rightarrow \begin{aligned} \Box\vec{A}(\vec{r},t) &= -\mu_0\,\vec{\jmath}(\vec{r},t) \\ \Box\varphi(\vec{r},t) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$ 4 ungekoppelte, inhomogene Wellengleichungen.

Dazu geht man von $\vec{A}\,'$ und φ' aus und kann die Eichung bestimmen: $\Box f(\vec{r},t) = \text{div}\Big(\vec{A}\,'(\vec{r},t)\Big) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi'(\vec{r},t)$.

Die Lösungen sind:
$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ret}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \text{d}V'\,\frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{d}V'\,\frac{\vec{\jmath}_{\text{makr}}(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}.$$
(„retardierte Potenziale“)

– –

Allgemein: $\Box V(\vec{r},t) = -q(\vec{r},t)$.
Die Lösung bestimmt man über den Ansatz: $V(\vec{r},t) = \int \text{d}V' \int \text{d}t'\, G_0(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\,q(\vec{r}\,',t')$,
mit: $\Box G_0(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$
und natürlichen Randbedingungen: $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} V(\vec{r},t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} V(\vec{r},t) = 0$.

Die Fouriertransformierte der Green'schen Funktion G_0 lässt sich zu: $g_0(k,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{c^2}{k^2\,c^2 - \omega^2}$ bestimmen.

Mit Hilfe folgender Mittel aus der Funktionentheorie und einigen Substitutionen lässt sich die Green'sche Funktion dann bestimmen:

1. z komplex $\to f(z)$ heißt „**holomorph**“ oder „**analytisch**“, wenn $f(z)$ in einem Teilgebiet der komplexen Ebene beliebig oft stetig diff'bar ist.
2. Cauchy: $f(z)$ holomorph in G und C eine geschlossene Kurve in G: $\int_C \text{d}z\, f(z) = 0$.
3. Hat $f(z)$ einen Pol ersten Grades in einem Punkt, so: $\text{Res}_{z_0}(f(z)) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$. („**Residium**“)
4. Ist $f(z)$ analytisch außer in endlich vielen Punkten (dort Polstellen 1. Grades) $a_1,\ldots,a_n$, dann:
$$\int_C \text{d}z\, f(z) = 2\pi\,\text{i}\sum_{k=1}^{n}\text{Res}_{a_k}(f(z))\ .$$
5. **Kausalität**: $G_0(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') \stackrel{!}{=} G_{\text{ret}}(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = 0$, für $t' > t$.
6. Polstellen der Green'schen Funktion im Fourierraum: $\omega_{\text{pol}} \stackrel{!}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \pm ck - \text{i}\epsilon$. ($\Leftrightarrow$ kausale Welle, Retardierung)

$\Rightarrow\ G_0(\vec r-\vec r\,',t-t')=\dfrac{1}{4\pi|\vec r-\vec r\,'|}\delta(t-t'-\dfrac{|\vec r-\vec r\,'|}{c})$; und somit ist: $V_{\text{ret}}(\vec r,t)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V'\,\frac{q(\vec r\,',t-\frac{|\vec r-\vec r\,'|}{c})}{|\vec r-\vec r\,'|}$.

Nutzt man die avancierte Green'sche Funktion, so erhält man die avancierten Potenziale; dabei werden nur die Einflüsse aus der Zukunft zur Bestimmung des Jetzt benutzt ($\rightarrow$ akausal). Dann erhält man das gleiche, nur statt: $t-\frac{|\vec r-\vec r\,'|}{c}$ dann $t+\frac{|\vec r-\vec r\,'|}{c}$.

– –

Coulomb-Eichung: $\quad\operatorname{div}\left(\vec A(\vec r,t)\right)\overset{!}{=}0$ (Charles Augustin de Coulomb)

$$\Rightarrow\ \begin{aligned}&\Delta\varphi(\vec r,t)=-\frac{\rho_{\text{ext}}(\vec r,t)}{\varepsilon_0}\\&\Box\vec A(\vec r,t)=-\mu_0\,\vec\jmath(\vec r,t)+\frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec r,t)\right)\end{aligned}$$ „entkoppelte“ Differentialgleichungen.

Dazu geht man von $\vec A\,'$ und φ' aus und kann die Eichung bestimmen: $-\Delta f(\vec r,t)=\operatorname{div}\left(\vec A\,'(\vec r,t)\right)$.

Die Lösung für $\varphi(\vec r,t)$ ist: $\varphi(\vec r,t)=\dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\displaystyle\int_V\mathrm{d}V'\frac{\rho_{\text{ext}}(\vec r\,',t)}{|\vec r-\vec r\,'|}$.

Durch Aufspaltung von $\vec\jmath_{\text{makr}}(\vec r,t)$ in $\vec\jmath_{\text{T}}(\vec r,t)+\vec\jmath_{\text{L}}(\vec r,t)$ mit $\operatorname{div}(\vec\jmath_{\text{T}}(\vec r,t))=0$ und $\operatorname{rot}(\vec\jmath_{\text{L}}(\vec r,t))=0$ (T - tangential; L - longitudinal) kann man bei natürlichen Randbedingungen voriges umschreiben:

$$\mu_0\,\vec\jmath_{\text{L}}(\vec r,t)=-\tfrac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{grad}_{\vec r}\left(\int_V\mathrm{d}V'\,\frac{\operatorname{div}_{\vec r\,'}\left(\vec\jmath(\vec r\,',t)\right)}{|\vec r-\vec r\,'|}\right)=\tfrac{1}{c^2}\operatorname{grad}\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec r,t)\right)\quad.$$

$\Rightarrow\Box\vec A(\vec r,t)=-\mu_0\,\vec\jmath_{\text{makr T}}(\vec r,t)$; dessen Lösung ist: $\vec A_{\text{ret}}(\vec r,t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V\mathrm{d}V'\,\frac{\vec\jmath_{\text{makr T}}(\vec r\,',t-\frac{|\vec r-\vec r\,'|}{c})}{|\vec r-\vec r\,'|}$.

mit $\vec\jmath_{\text{makr T}}(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_{\vec r}\left(\operatorname{rot}_{\vec r}\left(\int_V\mathrm{d}V'\,\frac{\vec\jmath_{\text{makr}}(\vec r\,',t)}{|\vec r-\vec r\,'|}\right)\right)$

Poynting-Satz: (Energiebilanz)

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich mit dem **Pointingvektor** $\vec S(\vec r,t)=\vec E(\vec r,t)\times\vec H(\vec r,t)$ folgender Ausdruck:

$$\vec E(\vec r,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec D(\vec r,t)+\vec H(\vec r,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec B(\vec r,t)+\operatorname{div}\left(\vec S(\vec r,t)\right)=-\vec\jmath(\vec r,t)\,\vec E(\vec r,t)\quad.$$

Im Vakuum gilt dann:

$\vec D(\vec r,t)=\varepsilon_0\vec E(\vec r,t)$, $\vec B(\vec r,t)=\mu_0\vec H(\vec r,t)$ $\Rightarrow$ $\vec E(\vec r,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec D(\vec r,t)+\vec H(\vec r,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec B(\vec r,t)=\frac{\partial}{\partial t}[\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec E^2(\vec r,t)}_{w_{\text{el}}}+\underbrace{\frac{1}{2}\mu_0\vec H^2(\vec r,t)}_{w_{\text{magn}}}]=$ $\frac{\partial}{\partial t}w(\vec r,t)$

$$\Rightarrow\qquad\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{w(\vec r,t)}_{\text{EM Energiedichte}}+\operatorname{div}\Big(\underbrace{\vec S(\vec r,t)}_{\text{EM Energiefluss}}\Big)=\underbrace{-\vec\jmath_{\text{makr}}(\vec r,t)\,\vec E(\vec r,t)}_{\text{Energieumwandlung in nicht-elektr. / nicht-magn.}}\quad.$$

$$\Leftrightarrow\ \tfrac{\partial}{\partial t}[W_{\text{EM}}(t)+W_{\text{kin}}(t)]=-\textstyle\int_{\partial V}\vec S(\vec r,t)\,\mathrm{d}\vec f$$

In Medien ohne Dispersion (im entsprechenden Spektralbereich) gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\vec r,t)+\operatorname{div}\left(\vec S(\vec r,t)\right)=-\vec\jmath_{\text{makr}}(\vec r,t)\,\vec E(\vec r,t)$$

mit $\vec D(\vec r,t)=\varepsilon_0\,\varepsilon(\vec r)\,\vec E(\vec r,t)$, $\vec B(\vec r,t)=\mu_0\,\mu(\vec r)\,\vec H(\vec r,t)$ und $w(\vec r,t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,\varepsilon(\vec r)\,\vec E^2(\vec r,t)+\frac{1}{2}\mu_0\,\mu(\vec r)\,\vec H^2(\vec r,t)$.

In dispersiven und adsorptiven Medien mit monochromatischen Feldern gilt dann:

Sei $\langle\,\cdot\,\rangle$ die zeitliche Mittelung, dann: $\langle\vec{E}^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2$ und $\langle\vec{H}^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{2}|\vec{H}(\vec{r})|^2$ ($\vec{D}$, $\vec{B}$ analog).

$\Rightarrow$

$$\operatorname{div}\Big(\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle\Big) = -\langle\vec{\jmath}(\vec{r},t)\,\vec{E}(\vec{r},t)\rangle - \frac{1}{2}\omega_0\Big[\operatorname{Im}\Big(\vec{E}^*(\vec{r},t)\,\vec{P}(\vec{r},t)\Big) + \operatorname{Im}\Big(\vec{H}^*(\vec{r},t)\,\vec{M}(\vec{r},t)\Big)\Big]$$

Speziell in stromfreien, linearen Medien: $\operatorname{div}\Big(\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle\Big) = -\omega_0\Big[\varepsilon_0\operatorname{Im}(\varepsilon(\vec{r},\omega_0))\,\langle\vec{E}^2(\vec{r},t)\rangle + \mu_0\operatorname{Im}(\mu(\vec{r},\omega_0))\,\langle\vec{H}^2(\vec{r},t)\rangle\Big]$

In dispersiven Medien mit $\Delta\omega \ll \omega_0$ gilt: (in Optik $\omega_0 \approx 10^{15}$ Hz, somit $\Delta\omega \approx 10^{12}$ Hz möglich)

Wegen $\Delta\omega \ll \omega_0$ folgt:

Felder mit relativ langsam veränderlicher Amplitude: $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\,\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t)\;\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\omega_0 t} + c.c.$ ($\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ analog!)

Dann ergibt sich der **Poynting'sche Satz in Medien** mit $\vec{\jmath}_{\text{makr}} = 0$ und in linearer Näherung bezüglich ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle w(\vec{r},t)\rangle + \operatorname{div}\Big(\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle\Big) = -\varepsilon_0\,\omega_0\,\operatorname{Im}(\varepsilon(\vec{r},\omega_0))\;\langle\vec{E}^2(\vec{r},t)\rangle - \mu_0\,\omega_0\,\operatorname{Im}(\mu(\vec{r},\omega_0))\;\langle\vec{H}^2(\vec{r},t)\rangle$$

mit der gemittelten EM Energiedichte: $\langle w(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial[\omega_0\operatorname{Re}(\varepsilon(\vec{r},\omega_0))]}{\partial\omega_0}\langle\vec{E}^2(\vec{r},t)\rangle + \frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial[\omega_0\operatorname{Re}(\mu(\vec{r},\omega_0))]}{\partial\omega_0}\langle\vec{H}^2(\vec{r},t)\rangle.$

Impulssatz der Elektrodynamik im Vakuum:

Für die Kraftdichte des elektormagnetischen (EM) Feldes gilt: $f_i = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}S_i + T_{ij},_j$

mit dem Maxwell'schen Spannungstensor: $T_{ij}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \delta_{ij} w(\vec{r},t)$,

der Energiedichte: $w(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_j E_j + \frac{1}{2}\mu_0 H_j H_j$ und dem Poynting-Vektor $\vec{S}$.

Nennt man $\vec{P}(\vec{r},t) = \int_V \mathrm{d}V\,\frac{1}{c^2}\vec{S}(\vec{r},t)$ den **Impuls** des EM Feldes und T_{ij} dessen **Impulsstromflächendichte**, so:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_i(\vec{r},t) - \int_{\partial V} T_{ij}(\vec{r},t)\;\mathrm{d}f_j = -\int_V \mathrm{d}V\;f_i(\vec{r},t).$$

Dabei bewirkt die Kraft eine Änderung der kinetischen Energie der Teilchen: $\int_V \mathrm{d}V\;\vec{f}(\vec{r},t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{\text{mech}}$.

$\Rightarrow$ „Die zeitliche Änderung der Summe von mechanischem und elektromagnetischem Impuls in einem Volumen ist gleich dem elektromagnetischen Impulsstrom aus dem Volumen.“

– –

Elektromagnetische Wellen:

Im Vakuum: (jetzt wirklich **Vakuum**: $\rho \equiv 0$, $\vec{\jmath} \equiv 0$.)

Feldgleichungen: $\Box\vec{E}(\vec{r},t) = 0$ $\Box\vec{B}(\vec{r},t) = 0.$

Mit Coulomb-Eichung und dem Ansatz $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{a}(\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ für monochromatische Felder der Kreisfrequenz ω mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$, wobei $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ **Phase** heißt, ergibt sich die **Dispersionsrelation**:

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Außerdem sind zu jedem Zeitpunkt t die Punkte gleicher Phase gegeben durch: $\vec{k}\,\vec{r} = const.$; bei ebenen Wellen beschreibt dies Ebenen.
Auch gilt: $\vec{k} \perp \vec{a}(\vec{k})$ ($\rightarrow$ Transversalität).

Mit der räumlichen Periode $\lambda = \dfrac{2\pi}{|\vec{k}|}$ und der zeitlichen Periode $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}$ (ν - zeitliche Frequenz) ergibt sich über die Dispersionsrelation: $c = \lambda\nu$.

Phasengeschwindigkeit: $v_{\text{Phase}} = c$.
Da $\vec{k} \perp \vec{a}(\vec{k})$ sind 2 Komponenten von $\vec{a}(\vec{k})$ frei wählbar $\Rightarrow$ i.Allg. elliptische Polarisation.

Es ergibt sich schließlich: $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{i}\,\omega \vec{A}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{i}\,\vec{k} \times \vec{A}(\vec{r},t)$.

In transparenten, homogenen Medien:

$\mu = 1,\ \ \varepsilon(\vec{r},\omega) \overset{\text{Homogenität}}{=} \varepsilon(\omega) \overset{\text{Transparenz}}{=} \operatorname{Re}(\varepsilon(\omega))$, mit $\operatorname{div}\left(\vec{\vec{E}}\right) = 0$ ($\Leftrightarrow \omega \neq \omega_{\text{Longitudinal}} : \varepsilon(\omega_{\text{Longitudinal}}) = 0$) gilt:

$$\Delta\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega)\,\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = 0 \qquad \text{(Helmholtz-Gleichung)}$$

$\Rightarrow \vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = \vec{e}(\vec{k},\omega)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}}\ \ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}(\vec{k},\omega)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ mit der Dispersionsrelation: $\vec{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)$.

Für einen Puls ($\Delta\omega \ll \omega_0$) gilt: $$k(\omega)\big|_{\omega_0} \approx \underbrace{k(\omega_0)}_{=\frac{\omega_0}{v_{\text{Ph}}(\omega_0)}} + \underbrace{\frac{\partial k}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_0}}_{=\frac{1}{v_{\text{Gruppe}}(\omega_0)}} (\omega-\omega_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\bigg|_{\omega_0}}_{=D(\omega_0)=\text{Dispersion der } v_{\text{Gruppe}}} (\omega-\omega_0)^2$$

Erzeugung im Vakuum:

Über die Lorenz-Eichung und die Kontinuitätsgleichung ergibt sich:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\left(\vec{A}(\vec{r})\right) \quad , \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \mathrm{i}\,\omega[\vec{A}(\vec{r}) + \tfrac{c^2}{\omega^2}\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\left(\vec{A}(\vec{r})\right)\right).$$

Über eine Multipolentwicklung ergeben sich aus dem retardierten Potenzial:
$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int_V \mathrm{d}V'\,\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{vektorielle Kugelwelle}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}$$
die Potenziale erzeugt durch:

- Elektrisches Dipolmoment: $$\vec{A}_D(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kr}}{r}\int_V \mathrm{d}V'\,\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kr}}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{p}_{\vec{r}=0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\right)$$
  Dies gilt für harmonisch schwingende Ladungsverteilungen ($\rightarrow$ Monochromasie); für beliebig zeitabhängige Ladungsverteilungen ergibt sich: $$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{p}_{\vec{r}=0}(t-\frac{r}{c})\right)$$
  Aus dem monochromatischen Vektorpotenzial ergeben sich $\vec{B}$- und $\vec{E}$-Feld wie folgt:
  $$\vec{B}_D(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}k\omega\left[\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right]\left[\underbrace{1}_{\text{Fern-/Strahlungsfeld}} - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{i}\,kr}}_{\text{Nahfeld}}\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kr-\omega t]}}{r}$$
  $$\vec{E}_D(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\underbrace{k^2\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right]}_{\text{Fernfeld}} + \underbrace{\left[3\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\vec{p}\right)-\vec{p}\right]\left[\frac{1}{r^2}-\frac{\mathrm{i}\,k}{r}\right]}_{\text{Nahfeld}}\right\}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kr-\omega t]}}{r}$$

Im Nahfeld hängt das Feld an den Quellen, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben und $|\vec{E}| \gg c|\vec{B}|$; im Fernfeld hingegen ist $\vec{E} \perp \vec{B}$, beide sind $\perp \vec{r}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind in Phase, $|\vec{E}| \approx c|\vec{B}|$ und sie beschreiben eine Kugelwelle $\sim \frac{1}{r}$.

Im Fernfeld ergibt sich über Fourier für beliebig zeitabhängige Ladungsverteilungen: $\vec{B}_D(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{r}\left[\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$
$\Rightarrow$ nur beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab!

Die zeitlich gemittelte Energiedichte ergibt sich zu: $\langle w_D(\vec{r},t)\rangle = \frac{\varepsilon_0}{2}\langle \vec{E}_D^2(\vec{r},t)\rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle \vec{B}_D^2(\vec{r},t)\rangle \overset{\text{Fernf.}}{=} \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}_D(\vec{r})|^2$.
Der zeitlich gemittelte Energiestrom ist: $\langle \vec{S}_D(\vec{r},t)\rangle = c\,\langle w_D(\vec{r},t)\rangle\,\frac{\vec{r}}{r}$.

Dies kann man im Fernfeld explizit angeben:

$$\langle w_D(\vec{r},t)\rangle = \frac{\omega^4}{32\pi^2\,\varepsilon_0\,c^3\,r^2}\,p^2\sin^2(\vartheta) \quad , \qquad \langle \vec{S}_D(\vec{r},t)\rangle = \frac{\omega^4}{32\pi^2\,\varepsilon_0\,c^3\,r^2}\,p^2\,\sin^2(\vartheta)\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

Die abgestrahlte Energie ist dann: $\int_{\partial V} \mathrm{d}f\,\langle \vec{S}_D(\vec{r},t)\rangle = \frac{\omega^4\mu_0}{12\pi\,c}\,p^2.$ $\qquad \sim \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{p}(t)\right]^2$

- magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolmoment:

$$\begin{aligned}\vec{A}_D(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kr}}{r}\left(\frac{1}{r} - \mathrm{i}\,k\right)\int_V \mathrm{d}V'\,\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\\ &= \underbrace{\frac{\mathrm{i}\,k\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kr}}{r}\left[1 - \frac{1}{\mathrm{i}\,kr}\right]\left[\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{m}_{\vec{r}=0}\right]}_{\vec{A}_{MD}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}ck^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kr}}{r}\left[\frac{1}{r} - \mathrm{i}\,k\right]\int_V \mathrm{d}V'\,\left[\left[\frac{\vec{r}}{r}\,\vec{r}\,'\right]\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\right]}_{\vec{A}_{EQ}}\end{aligned}$$

Aus $\vec{A}_{MD}$ ergibt sich dann: $\vec{B}_{MD}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kr}}{r}\left\{k^2\left[\left[\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{m}\right] \times \frac{\vec{r}}{r}\right] + \left[3\frac{\vec{r}}{r}\left[\frac{\vec{r}}{r}\vec{m}\right] - \vec{m}\right]\left[\frac{1}{r^2} - \frac{\mathrm{i}\,k}{r}\right]\right\}$

$$\langle \vec{S}_{MD}(\vec{r},t)\rangle = \frac{\omega^4}{32\pi^2\,\varepsilon_0\,c^3\,r^2}\frac{1}{{\mu_0}^2}m^2\sin^2(\vartheta)\frac{\vec{r}}{r}$$

Betrachtungen zum Nah- und Fernfeld, zur monochromatischen und polychromatischen Zeitabhängigkeit folgen analog zum elektrischen Dipol.
Zu beachten: Das elektrische Quadrupolmoment und das magnetische Dipolmoment treten in gleicher Ordnung auf!

Dabei heißt Nahfeld : $r\,' \ll r \ll \lambda$, mittleres Feld : $r\,' \ll r \approx \lambda$, Fernfeld : $r\,' \ll \lambda \ll r$.

Das Potenzial einer bewegten Punktladung: („Lienard-Wichert-Potenziale", Vakuum, kausal)

$$\varphi_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_V \mathrm{d}V'\,\frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)$$
$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_V \mathrm{d}V'\,\frac{\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)$$

, wobei $\rho(\vec{r}\,',t') = Q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{R}(t'))$
und $\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t') = Q\,\frac{\partial}{\partial t'}\vec{R}(t')\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{R}(t'))$.
$= Q\,\vec{v}(t')\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{R}(t'))$

Da $\delta(F(t')) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(t'-\tau_k)}{|\frac{\partial}{\partial t'}F(\tau_k)|}$ mit $F(\tau_k) = 0$ ergibt sich:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)| - [\vec{r}-\vec{R}(\tau)]\frac{\vec{v}(\tau)}{c}}$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)| - [\vec{r}-\vec{R}(\tau)]\frac{\vec{v}(\tau)}{c}}\,\vec{v}(\tau) \;=\; \frac{1}{c^2}\varphi(\vec{r},t)\,\vec{v}(\tau)$$

, wobei τ implizit gegeben ist über: $\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}{c}$.

Die Felder folgen (wie immer bei Lorenz-Eichung) nach: $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) - \mathrm{grad}(\varphi(\vec{r},t))$, $\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\left(\vec{A}(\vec{r},t)\right)$.

Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen:

Zeit ist nicht absolut! c ist konstant! $4D$-Raum zur Beschreibung: $\begin{pmatrix} \text{Zeit} \\ \text{Ort} \end{pmatrix}$.

Lorentz-Transformation: (Henrik Lorentz)
o.B.d.A. nur in x-Richtung: $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma(-\frac{\beta}{c}x + t)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

Minkowski-Raum zur Beschreibung. (Hermann Minkowski)

Viererstrom: $j^\mu = \begin{bmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix}$; Viererpotential: $A^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$, Ableitung: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$.

Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0$

Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$

Wellengleichung: $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 \, j^\mu$

Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ bzw. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - vollständig antisymmetrisch!

Damit lassen sich die Maxwellgleichungen wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu && \text{inhomogene MWG} \\ \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} &= 0 && \text{homogene MWG} \end{aligned}$$

Lorentz-Kraftdichte: $f^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu$

Energie-Impuls-Bilanz: $f^\mu = -\partial_\sigma T^{\sigma\mu}$

Energie-Impuls-Tensor: $T^{\sigma\mu} = T^{\sigma\mu} = \frac{1}{\mu_0}\left[g^{\sigma\lambda} F^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} g^{\mu\sigma} F_{\nu\tau} F^{\nu\tau}\right]$

Lorentztransformation der Tensoren: $F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau}$; der Vektoren: $j^\mu = L^\mu{}_\nu j^\nu$

Die Felder transformieren dann:

$$\begin{aligned} \vec{E}\,' &= \gamma\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\vec{v}}{v^2}\left[\vec{v}\vec{E}\right]\right] \\ \vec{B}\,' &= \gamma\left[\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\vec{v}}{v^2}\left[\vec{v}\vec{B}\right]\right] \end{aligned}$$