Fourierreihen (Fortsetzung): $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$

$a_0 = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad a_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}\qquad b_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}.$

komplex: $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{L}x}$, mit $A_n = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{L}x}\,\mathrm{d}x$.

Das **Parseval'sche Theorem**: $\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|A_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

Riemannsche Zeta-Funktion: $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$

Fourier-Transformationen:

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x \overset{!}{<} \infty$ muss absolut integrabel sein ($\Leftrightarrow$ „temperiert"), dann heißen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \qquad \text{- Fourier-Integral,}$$

$$\mathscr{F}[f(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \qquad \text{- Spektral-Funktion}$$

(Fourier-Transformierte von $f(x)$)

Orthogonalitätsrelation: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} = \delta(k-k')$

Translation: $\mathscr{F}[f(x-x_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\,\mathscr{F}[f(x)]$

Ableitung: $\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \mathrm{i}k\,\mathscr{F}[f(x)]$

f(x) reell: $\mathscr{F}[f(-x)] = \mathscr{F}^*[f(x)] \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(-x) & \Rightarrow \mathscr{F}[f(x)] \text{ reell} \\ f(x) = -f(-x) & \Rightarrow \mathscr{F}[f(x)] \text{ rein imaginär}\end{cases}$

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k}$$

$f(t) = f_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t^2} \Rightarrow \mathscr{F}[f(t)](k) = \frac{f_0}{\sqrt{2\lambda}}\,\mathrm{e}^{\frac{-k^2}{4\lambda}}$; mit den Halbwertsbreiten Δt, $\Delta\omega$ ergibt sich: $\Delta t\cdot\Delta\omega = 8\ln(2)$.

$$\mathscr{F}[f(x)\cdot F(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k' g(k')\;G(k-k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'' g(k-k'')\;G(k'')$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g*G)(k)$$ – **Faltung von g und G**, wobei $g(k) = \mathscr{F}[f(x)](k)$, $G(k) = \mathscr{F}[F(x)](k)$.

Fouriertransformierte der Faltung: $\mathscr{F}[f(x)*F(x)](k) = \sqrt{2\pi}\;G(k)\;g(k)$

Parseval'sches Theorem: $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\;|f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\;|g(k')|^2$

(verallgemeinertes Parsevall'sches Theorem: $\mathscr{F}[f(x)F(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'\;g(k')\;G(k-k')$)

Charakteristiken-Methode:

$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$; Ansatz: $\Phi(x,y) = f(p)$ mit $p(x,y) = ax + by \Rightarrow$

1. trivialer Fall: $\Phi(x,y) = \alpha(ax+by) + \beta$
2. $p_i = a(x + \lambda_i y)$ mit $\lambda_{1/2} = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2 - 4AC}$. Die DGL heißt wenn $B^2 - 4AC \begin{cases} > 0: \text{hyperbolisch} \\ = 0: \text{parabolisch} \\ < 0: \text{elliptisch}\end{cases}$.

   $\Rightarrow \Phi(x,y) = c_1\,f(p_1) + c_2\,f(p_2) = \Phi_1(x+\lambda_1 y) + \Phi_2(x + \lambda_2 y)!$

Sei $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ es heißen $\begin{cases} p_1 \sim x + \lambda_1 y & - \text{ avanciert} \\ p_2 \sim x + \lambda_2 y & - \text{ retardiert}\end{cases}$.

Außerdem heißen die Randbedingungen:

Dirichlet Φ auf jedem Randpunkt gegeben,

Neumann $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{n}\,\mathrm{grad}\,(\Phi)$ auf jedem Randpunkt gegeben,

Cauchy Φ und $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ auf jedem Randpunkte gegeben.

Liegen die Randbedingungen auf den Charakteristiken ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC} = -\frac{C}{A}\lambda_{1/2}$), so ist dieses Problem so nicht lösbar!

($\Rightarrow$ d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung: $\Phi(x,t) = \frac{1}{2}[F(x-ct)+F(x+ct)] + \frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct} G(x')\,dx'$ mit der Randbedingung $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}\big|_{t=0} = G(x)$)

Separationsansatz:

Ansatz: $\Phi(x,t) = X(x)\cdot T(t) \xrightarrow{\text{Wellengleichung}} X''(x)\,T(t) - \frac{1}{c^2}X(x)\,\ddot{T} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{X''}{X} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\ddot{T}}{T} \overset{!}{=} -k^2$

($\Rightarrow$ Lösung der Wellengleichung: $\Phi(x,t) = \sum\!\!\!\!\!\int_k [A_k e^{\mathrm{i}(kx+\omega t)} + B_k e^{\mathrm{i}(kx+\omega t)}]$)

Lösung der Wellengleichung in 2D $\Rightarrow$ Ansatz $\Phi(r,\varphi,t) = R(r)\,\Phi'(\varphi)\,T(t)$ mit $\Phi'(\varphi)$ und $T(t)$ harmonischen sin-cos-Verläufen; dann erhält man die Bessel'sche DGL: $r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + (r^2k^2-\mu^2)R = 0$

Separationsansatz 2:

Ansatz: $y = x^\lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$,

diesen der DGL (z.B.: $y'' + \omega^2 y = 0$) entsprechend oft ableiten,

einsetzen ($\lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda-2} + (\lambda+1)\lambda a_1 x^{\lambda-1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left((\lambda+k+2)(\lambda+k+1)a_{k+2} + \omega^2 a_k\right)x^{\lambda+k} = 0$)

und nach gleichen x-Komponenten auftrennen, welche alle als Vorfaktor 0 haben müssen, da die DGL für alle x gilt; dabei ergeben sich dann die **Indexgleichung** für $a_0 \neq 0$ ($\lambda(\lambda-1) = 0$), sowie andere Vorschriften ($\lambda(\lambda+1)a_1 = 0$); insbesondere Rekursionsvorschriften ($a_{k+2} = -\dfrac{\omega^2}{(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)}a_k$).

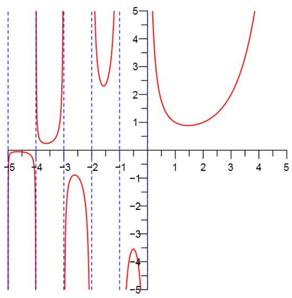
Durch Bestimmung von $a_n : \forall n$ und Einsetzen in den Ansatz lässt sich dann ein Ergebnis formulieren

($y_1 = a_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(\omega x)^{2n} = a_0\cos(\omega x) \;\wedge\; y_2 = \dfrac{a_0}{\omega}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\omega x)^{2n+1} = \dfrac{a_0}{\omega}\sin(\omega x)$).

Die **Gamma-Funktion**: $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \xi^{\alpha-1}\,e^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi$, $\alpha > 0$

k ganz $\Rightarrow \Gamma(k+1) = k!$, $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2k)!}{k!\,2^{2k}}\sqrt{\pi}$; für $\alpha < 0$ gelte: $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$.

Es gilt immer: $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.



$\Gamma(x)$ **im Reellen**

Wronski-Determinante: $W(f_1,...,f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1^{(1)}(t) & f_2^{(1)}(t) & \dots & f_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$, $t \in I$.

Gilt $W(f_1,...,f_n)(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so sind $f_1,\dots,f_n$ linear unabhängig.

Gilt $W(f_1,...,f_n) \equiv 0$, so folgt nicht lineare Abhängigkeit auf ganz I.

Die **Besselfunktion**:

Besselfunktion 1.Art der Ordung μ: $$J_\mu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(\mu+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2j}.$$

Besselfunktion 2.Art der Ordnung μ: $$N_\mu(x) = \frac{J_\mu(x)\,\cos(\pi\mu) - J_{-\mu}(x)}{\sin(\pi\mu)}.$$

(= „Neumann-Funktion“)

Für ganze $\mu = m \in \mathbb{Z}$ ergibt sich:

$$N_m = \lim_{\mu\to m} N_\mu = \frac{2}{\pi}\ln(\frac{x}{2})J_m - \frac{1}{\pi}(\frac{x}{2})^m \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\psi(m+j+1)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(m+j+1)}(\frac{x}{2})^{2j} - (-1)^m\frac{1}{\pi}(\frac{x}{2})^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\psi(-m+j+1)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(-m+j+1)}(\frac{x}{2})^{2j}$$

mit der Digamma-Funktion $\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(\Gamma(x))] = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$.

Besselfunktionen 3.Art der Ordnung μ: $H_\mu^{(1)} = J_\mu + \mathrm{i}\,N_\mu \quad H_\mu^{(2)} = J_\mu - \mathrm{i}\,N_\mu$.

(= „Hankel-Funktion“)

Fundamentalsysteme für die Lösung der Besselgleichung , die randbedingungsabhängig auszuwählen sind:

$$\{J_\mu, N_\mu\},\ \{J_\mu, H_\mu^{(1)}\},\ \{J_\mu, H_\mu^{(2)}\},\ \{N_\mu, H_\mu^{(1)}\},\ \{N_\mu, H_\mu^{(2)}\},\ \{H_\mu^{(1)}, H_\mu^{(2)}\}.$$

Kugelflächenfunktionen:

Die Separation der 3-dimensionalen Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten ($\Delta U(\vec{r}) = 0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$) liefert über den Separationsansatz $U(\vec{r}) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$ folgendes Differentialgleichungssystem:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) - \alpha\,R = 0$
2. $\frac{1}{\sin(\vartheta)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(\sin(\vartheta)\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}) + (\alpha - \frac{\beta}{\sin^2(\vartheta)})\,\Theta = 0$
3. $\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \beta\,\Phi = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

3. $\Rightarrow$ $\Phi(\varphi) = A\cos(m\,\varphi) + B\sin(m\,\varphi)$ mit $\boxed{m \in \mathbb{Z}}$, $\beta = m^2$.

2. $\Rightarrow$ $x := \cos(\vartheta),\ P(x) := \Theta(\vartheta)$: $(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + (\alpha - \frac{m^2}{1-x^2})P = 0$ („zugeordnete Legendre'sche DGL“)

Für $\underline{m = 0}$ ergibt sich mit einem Potenzreichenansatz ($P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^{\lambda+k}$ $,a_0 \neq 0$):

$$P_{\lambda=0}(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\alpha\,(\alpha-2\cdot3)\cdots(\alpha-(2n-2)\,(2n-1))}{(2n)!}x^{2n}\right]$$
$$P_{\lambda=1}(x) = a_0\,x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\alpha-1\cdot2)\,(\alpha-3\cdot4)\cdots(\alpha-(2n-1)\,2n)}{(2n+1)!}x^{2n}\right]$$

Sommerfeld'sche Polynom-Methode:
Da diese für $|x| = 1$ divergieren, wählen wir α nun so, dass die unendliche Reihe abbricht:
$\lambda = 0$: $l = 2n_{\max}$ mit $\boxed{\alpha = l\,(l+1),\quad l \in \mathbb{N}}$.
$\lambda = 1$: $l = 2n_{\max} + 1$

$$P_{\lambda=0}(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{l/2} (-1)^n \frac{\alpha\,(\alpha - 2\cdot 3)\cdots(\alpha - (2n-2)\,(2n-1))}{(2n)!}\, x^{2n}\right]$$

$$P_{\lambda=1}(x) = a_0\, x \left[1 + \sum_{n=1}^{[l/2]} (-1)^n \frac{(\alpha - 1\cdot 2)\,(\alpha - 3\cdot 4)\cdots(\alpha - (2n-1)\,2n)}{(2n+1)!}\, x^{2n}\right]$$

(„Legendre-Polynome“ / „Kugelfunktionen 1. Art“)

Diese normiert man allgemein über $P_l(1) \overset{!}{=} 1$ und definiert:

- wenn l gerade ($P_{\lambda=0}(x)$ konvergiert $\forall x$): $Q_l(x) = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}\, 2^l\, [(\frac{l}{2})!]^2}{l!}\, P_{\lambda=1}(x)$ (konvergiert $\forall x : |x| < 1$)
- wenn l ungerade ($P_{\lambda=1}(x)$ konvergiert $\forall x$): $Q_l(x) = \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}\, 2^{l-1}\, [(\frac{l-1}{2})!]^2}{l!}\, P_{\lambda=0}(x)$ (konvergiert $\forall x : |x| < 1$)

Für $\underline{m > 0}$ kann man über m-fache Ableitung der „Legendre'schen DGL“ $(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \alpha P = 0$ und die Substitution $y = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l$ folgenden Zusammenhang finden:

$$P_l{}^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l$$

Da die „Legendre'sche DGL“ unabhängig von $+m$ oder $-m$ die gleiche Lösung (multipliziert mit einem Vorfaktor) liefert, definiert man:

$$P_l{}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l{}^m(x).$$

Da P_l ein Polynom l-ten Grades ist, gilt: $-l \le m \le l$.

1. $\Rightarrow$ Die Substitution $\rho = \ln(r)$ macht aus der „Eulerschen homogenen Differentialgleichung“

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\,\tfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) - \alpha\, R = 0$$

eine mit konstanten Koeffizienten und liefert mit einem Potenzreihenansatz (nach Rücksubstitution):

$$R(r) = Cr^l + D\, r^{-(l+1)}$$

$$\boxed{U(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[\left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)\left(C_{lm}\cos(m\varphi) + D_{lm}\sin(m\varphi)\right)\left(E_{lm} P_l{}^m(\cos(\vartheta)) + F_{lm} Q_l{}^m(\cos(\vartheta))\right)\right]}$$

Orthogonalität der Legendre-Reihen: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_l{}^m(x)\, P_k{}^m(x)\;\mathrm{d}x = \frac{2}{2k+1}\,\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\,\delta_{kl}$, mit $x = \cos(\vartheta)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Außerdem gilt: $P_k(x) = (-1)^k P_k(-x) \quad : \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Man definiert mit einer Skalierung des Produkts von Azimut- und Polarwinkelanteil die **Kugelflächenfunktionen**:

$$Y_l{}^m(\vartheta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l{}^m(\cos(\vartheta))\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\varphi}$$

Dabei gilt: $Y_l{}^{-m}(\vartheta,\varphi) = (-1)^m\; [Y_l{}^m(\vartheta,\varphi)]^*$

Orthogonalitätsrelation: $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \Big[Y_l{}^m(\vartheta,\varphi)\Big]^* \Big[Y_{l'}{}^{m'}(\vartheta,\varphi)\Big] = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

$$\Rightarrow \qquad f(\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_l{}^m(\vartheta,\varphi) \qquad \text{mit} \qquad a_{lm} = \int_0^{\pi}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\, f(\vartheta,\varphi)\,\Big[Y_l{}^m(\vartheta,\varphi)\Big]^*$$

Graphische Darstellung:

1. Polardiagramme: $|Y_l{}^m(\vartheta, \varphi)|^2$ mit Betrag abhängig von ϑ darstellen; durch Betrag unabhängig von φ.
2. Knotenlinien: $N_\vartheta = [l - m]$ Breitenkreise, $N_\varphi = m$ Meridiankreise; heißen „tesserale Kugelflächenfunktionen“.