Menge Ansammlung beliebiger, unterscheidbarer Elemente $M = \{x|...\}$.
[Ohne Relation unter und mit doppelten Elementen; allgemeiner: Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.]

- *Gleichheit*: A,B Mengen, $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
- *Teilmenge*: A,B Mengen, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$.
- *Durchschnitt*: U Menge von Mengen A, $\bigcap U = \{x|\forall A \in U : x \in A\}$.
- *Vereinigung*: U Menge von Mengen A, $\bigcup U = \{x|\exists A \in U : x \in A\}$.
- *Differenz*: A,B Mengen, $A\backslash B = \{x|[x \in A] \wedge [x \notin B]\}$ [$B \subseteq A$, so heißt $B^c = A\backslash B$ Komplement von B in A].
- *symmetrische Differenz*: A,B Mengen, $A\Delta B = [A\backslash B]\bigcup[B\backslash A] = [A\bigcup B]\backslash[A\bigcap B]$
- *kartesisches Produkt*: A_i Mengen, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,\ldots,a_n)|\forall a_i \in A_i : i \in \{1,\ldots,n\}\}$.
- *Potenzmenge*: A endliche Menge, $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A [$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$].
- *Mächtigkeit/Kardinalität*: $|M|$ die Anzahl der Elemente für endliche Mengen [$\in \mathbb{N}_0$].
- Leere Menge: $\varnothing = \{\}$ [$|\varnothing| = 0$].

Algebraische Struktur [kurz: Algebra] Ist ein Paar einer nichtleeren Trägermenge A und einer Familie von [endlichstelligen] Verknüpfungen (f_i) auf A : $(A,(f_i))$.

- *Typ/Signatur*: Stelligkeit der Verknüpfungen.
- *Homomorphismus*: strukturtreue Abbildung $\varphi : A \to B$ zwischen Algebren A,B:
$$\varphi(f_A(x_1,\ldots,x_n)) = f_B(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) \quad .$$
  - φ surjektiv: φ heißt *Epimorphismus*
  - φ injektiv: φ heißt *Monomorphismus*
  - $B = A$: φ heißt *Endomorphismus*
  - φ bijektiv mit Umkehrfunktion auch Homomorphismus: φ heißt *Isomorphismus*
  - φ Isomorphismus und Endomorphismus: φ heißt *Automorphismus*
- *σ-Algebra*: Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ [Ω Grundmenge] mit:
$$\Omega \in \mathcal{A} \quad , \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega\backslash A \in \mathcal{A} \quad , \quad A_i \in \mathcal{A} : \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad .$$

Gruppe Eine Menge G mit zweistelliger Verknüpfung $*$ auf ihr und Einselement e, sowie dem Inversen a^{-1} zu jedem a: $(G,*,^{-1},e)$; welche folgende Relationen erfüllt: [Signatur: $(2,1,0)$]
$\forall a,b,c \in G,\ \exists a^{-1},e \in G,\quad [a*b]*c = a*[b*c] \in G,\quad a*e = e*a = a,\quad a*a^{-1} = a^{-1}*a = e.$

- *abelsch/kommutativ*: gilt zusätzlich $a*b = b*a$ [sonst nicht-abelsch/nicht-kommutativ].
- *Mächtigkeit/Ordnung*: $|M|$ die Anzahl der Elemente für endliche Mengen.

Halbgruppe Eine Menge S mit innerer zweistelliger Verknüpfung: $(S,*)$; welche folgende Relation erfüllt:
$\forall a,b,c \in S,\quad [a*b]*c = a*[b*c] \in S$.

Ring Eine Menge R mit zwei inneren binären Verknüpfungen $+$, $\cdot$ heißt Ring: $(R,+,-,0,\cdot)$; falls:
$(R,+,-,0)$ ist eine abelsche Gruppe, $(R,\cdot)$ ist eine Halbgruppe, $\forall a,b,c \in R : a\cdot[b+c] = a\cdot b + a\cdot c$, $[a+b]\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

- Das *Nullelement* 0 des Ringes ist das Nullelement von $(R,+,-,0)$.
- *kommutativ*: wenn R bezüglich $\cdot$ kommutativ ist.
- *unitärer Ring*: $(R,\cdot,1)$ hat ein Einselement $1 \Rightarrow (R,+,-,0,\cdot,1)$.
- *Schiefkörper*: $(R\backslash\{0\},\cdot,^{-1},1)$ eine Gruppe $\Rightarrow (R,+,-,0,\cdot,^{-1},1)$.
- *Körper*: $(R\backslash\{0\},\cdot,^{-1},1)$ eine abelsche Gruppe $\Rightarrow (R,+,-,0,\cdot,^{-1},1)$.
- *Unterring*: $(U,+,-,0,\cdot)$ mit $U \subseteq R$ nichtleer und wieder ein Ring.

Halbring Eine Menge H mit zwei inneren binären Verknüpfungen $+$, $\cdot$ heißt Halbring: $(H,+,\cdot)$, falls:
$(H,+)$ ist eine abelsche Halbgruppe, $(H,\cdot)$ eine Halbgruppe, $\forall a,b,c \in H : a\cdot[b+c] = a\cdot b+a\cdot c$, $[a+b]\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$.

Raum Eine Menge ausgewählter mathematischen Objekte, die als Punkte behandelt werden, mit bestimmten Verknüpfungen zwischen diesen Punkten.

- *Vektorraum*: V Menge, $(K,+,-,0,\cdot,^{-1},1)$ Körper, $(V,\oplus,\ominus,⓪,\odot,^{①},①)$, wobei: $(V,\oplus,\ominus,⓪)$ ist abelsche Gruppe, $\forall u,v\in V,\ \forall\alpha,\beta\in K:$ $\alpha\odot[\beta\odot v]=[\alpha\cdot\beta]\odot v\ \in V,$ $\alpha\odot[u\oplus v]=\alpha\odot u\oplus\beta\odot v\ \in V,$ $[\alpha+\beta]\odot v=\alpha\odot v\oplus\beta\odot v\ \in V,$ $1\odot v=v$.
- *Halbraum*: V Vektorraum, $\lambda:V\to\mathbb{R}$ Linearform, $\beta\in\mathbb{R}$: $\{v\in V|\lambda(v)\geq\beta\}$ abgeschlossener ; $\{v\in V|\lambda(v)>\beta\}$ offener .
- *Prähilbertraum*: komplexer Vektorraum H mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- *Hilbertraum*: $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, der vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm ist.

Familie Seien X,I beliebige Mengen, so ist eine Familie von Elementen in X indiziert durch I gleich einer Funktion $x:I\to X$; man schreibt $\{x_i\}_{i\in I}$.

Verknüpfung f n-stellig auf M ist eine eindeutige Abbildung: $f:M^n\to M$.

Determinante Ist eine Abbildung aus $\mathrm{Mat}(n,n,K)\in(V,\oplus,\ominus,⓪,\odot,^{①},①)\times(V,\oplus,\ominus,⓪,\odot,^{①},①)$ auf den Körper $(K,+,-,0,\cdot,^{-1},1)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) multilinear, $v_1,\ldots,v_n,w\in V,\ r\in K$

$$\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i\oplus w,v_{i+1},\ldots,v_n)=\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)+\det(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n)$$
$$\det(v_1,\ldots,v_{i-1},r\odot v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)=r\cdot\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)$$

2) alternierend, $v_1,\ldots,v_n\in V,\ i,j\in\{1,\ldots,n\}:i\neq j$

$$\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_n)=0$$

3) normiert. $\det(\mathbb{1}_{n\times n})=1$

- $\det(v_1,\ldots,v_{i-1},⓪,v_{i+1},\ldots,v_n)=0$
- $\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_n)=-\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_n)$
- $\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)=\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i\oplus r\odot v_j,v_{i+1},\ldots,v_n)$ $[i\neq j]$
- Laplace-Spaltenentwicklung [$A\in\mathrm{Mat}(n,n,K)$, $A_{ij}^{Str}\in\mathrm{Mat}(n-1,n-1,K)$ ist die Matrix A ohne die i-te Zeile und j-te Spalte und $j\in\{1,...,n\}$ wird frei gewählt .]:
$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}^{Str})$$
$$\det(A\odot B)=\det(A)\cdot\det(B)\qquad\det(A^T)=\det(A)\qquad\det(A^{①})=\det(A)^{-1}$$

Benennungen

- $GL_n(K)$: die *allgemeine lineare Gruppe* von Grad n über dem Körper K ist die Gruppe aller regulären [invertierbaren] $n\times n$-Matrizen über K.
- $SL_n(K)$: die *spezielle lineare Gruppe* [auch *unimodulare*] vom Grad n über dem Körper K ist die Gruppe aller $n\times n$-Matrizen, deren Determinante 1 beträgt.
- $O(n)$: die *orthogonale Gruppe* vom Grad n ist die Gruppe der orthogonalen [quadratischen, reellen Matrizen, deren Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal zueinander sind] $n\times n$-Matrizen.
- $SO(n)$: die *spzeielle orthogonale Gruppe* vom Grad n ist die Gruppe der orthogonalen $n\times n$-Matrizen, deren Determinante 1 beträgt.
- $U(n)$: die *unitäre Gruppe* von Grad n über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die Gruppe aller unitären [$UU^\dagger=\mathbb{1}$] $n\times n$-Matrizen.
- $SU(n)$: die *spezielle unitäre Gruppe* von Grad n über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die Gruppe aller unitären $n\times n$-Matrizen, deren Determinante 1 beträgt.

Landau-Symbole : $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

- $f \in ox(g)$: asymptotisch gegen g vernachlässigbar: $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$
- $f \in \mathcal{O}(g)$: asymptotische obere Schranke: $\limsup\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$
- $f \in \Theta(g)$: asymptotisch scharfe Schranke: $0 < \liminf\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \limsup\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$