Vierernotation: [griechisch $\in \{1,2,3\}$; lateinisch $\in \{1,2,3,4\}$]

Index unten $\Rightarrow$ „Form“ , Index oben $\Rightarrow$ „Vektor“ , Summation nur über Indizes oben und unten.

$\underline{r} = x^i \underline{e}_i$, $\underline{e}_i \underline{e}_k = \eta_{ik}$, $\underline{a}\,\underline{b} = a^i b_i = a_i b^i = \eta_{ik} a^i b^k = \eta^{ik} a_i b_k$, $\underline{a} \neq \underline{b} : \underline{a}\,\underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$, $\underline{a} \neq \underline{0} : \underline{a} = \lambda \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$.

$\underline{x} = (x, y, z, c \cdot t)$, $\underline{j} = (j_x, j_y, j_z, c\rho)$, $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z, \frac{\varphi}{c})$,

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Leftrightarrow (\partial_x, \partial_y, \partial_z, \frac{1}{c}\partial_t)$, $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$, $\partial^i = \eta^{ij}\partial_j$, $F_{ij} = \eta_{im}\eta_{jn}F^{mn}$,

elektr.-magnet. Felder: $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$ [mit $\frac{E^\mu}{c} = F^{\mu 0}$, $B^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa}F^{\nu\kappa}$], Kontinuitätsgleichung: $\partial_i j^i = 0$,

Maxwell: $\partial_i F^{ij} = \mu_0 j^j$, $\partial_i \underbrace{\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}F_{kl}}_{\tilde{F}^{ij}} = 0$. ε^{ijkl} vollständig antisymmetrisch, $\varepsilon^{1234} = 1$.

Energie-Impuls-Tensor: $T^{ij} = \frac{1}{\mu_0} F^{ik} F_k{}^j + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{ij} F_{kl} F^{lk}$, $\partial_i T^{ij} = j^k F_k^j$.

<u>Inertialsystem</u>: Ein System, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig, gleichförmig bewegen.

<u>Relativitätsprinzip</u>: Führt man identische Experimente in unterschiedlichen Inertialsystemen durch, so erhält man identische Ergebnisse.

Das <u>Linienelement</u> des euklidischen Raums in kartesischen Koordinaten: $\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$; dies ist verschiebungs- und drehinvariant [$\mathrm{d}x^2 = [\mathrm{d}x]^2 \neq \mathrm{d}[x^2]$].

In jedem Inertialsystem ist die **Vakuum-Lichtgeschwindigkeit** $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. [per Definition!]

<u>Raumzeit</u>: 4-dimensionaler Raum [Inertialsystem Σ mit $(x, y, z, c \cdot t)$]; ein Punkt darin heißt <u>Ereignis</u>; alle Ereignisse eines Teilchens [Massenpunkt, Photon, Beobachter] auf einer Kurve bilden eine <u>Weltlinie</u>. $\frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{V_x}$

Linienelement des Minkowski-Raumes: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2$.

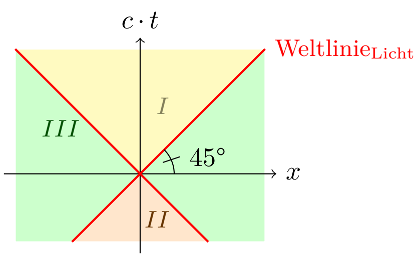
Es gilt: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$ und somit ${s_{12}}^2 = [\Delta x]^2 + [\Delta y]^2 + [\Delta z]^2 - c^2[\Delta t]^2 = [\Delta x']^2 + [\Delta y']^2 + [\Delta z']^2 - c^2[\Delta t']^2 = {s'_{12}}^2$.

$\Leftrightarrow$ Der Abstand zweier Ereignisse ist in allen Inertialsystemen gleich [Lorentz-invariant].

Der Abstand zweier Ereignisse x^1 und x^2 heißt: ${s_{12}}^2 < 0$ - <u>zeitartig</u> $\Rightarrow \exists$ System Σ' : Abstand $S'_{12} = 0$

${s_{12}}^2 = 0$ - <u>lichtartig</u>

${s_{12}}^2 > 0$ - <u>raumartig</u> $\Rightarrow \exists$ System Σ' : Zeitunterschied $t'_{12} = 0$



Bereich I - Zukunft ; Bereich II - Vergangenheit ; Bereich III - kausal unabhängig.

Vergangenheit und Zukunft sind in allen Inertialsystemen kausal/temporär gleich.

Die Weltlinie eines Teilchens [mit Ruhemasse] liegt immer innerhalb des Lichtkegels [bezogen auf jeden Punkt P [Ereignis] der Weltlinie].

<u>Eigenzeit</u> τ: $\mathrm{d}S'^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2$, $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$ [$\Rightarrow \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t \leq t_2 - t_1$ <u>Zeitdilatation</u>]

<u>Lorentz-Transformation</u>: $\eta_{ik} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$

$$x'^i = L^i_k x^k + d^i \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x}' = T_{\underline{L},\underline{d}}\,\underline{x} \qquad , \qquad \eta_{ik} L^i_m L^k_n = \eta_{mn}$$

[$T_{\underline{L},0} \in O(3,1)$ Lorentz- , $T_{\underline{L},\underline{d}} \in \mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(3,1)$ Poincaré-Gruppe ; zeitliche Drehung $\sim \sinh(\Psi), \cosh(\Psi) \mathrel{\hat{=}}$ linearer Bewegung.]

„Echt raumzeitliche Drehungen“ heißen auch <u>Lorentz boosts</u>. Für $\vec{v} = (v, 0, 0)$ gilt dann: $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $ct' = \dfrac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

<u>Lorentz-Kontraktion</u>: $l = l_0 \sqrt{1 - \left[\frac{v}{c}\right]^2}$ [nur entlang Bewegungsrichtung! $\rightarrow \underbrace{V}_{\text{Volumen}} = V_0\sqrt{1 - [\frac{v}{c}]^2}$]

Addition von Geschwindigkeiten: $v_{1+2} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \frac{1}{c^2} v_1 v_2}$.

Raumartige Vektoren: $\underline{a}\,\underline{a} > 0$, zeitartige Vektoren: $\underline{a}\,\underline{a} < 0$, lichtartige Vektoren: $\underline{a}\,\underline{a} = 0$;

Lorentztransformation: $a'^i = L^i_k a^k$.

Parameterdarstellung: $x^i(\tau)$; Vierergeschwindigkeit: $(u^i) = \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right) = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\left[\frac{v}{c}\right]^2}}, \frac{c}{\sqrt{1-\left[\frac{v}{c}\right]^2}}\right)$

Eigenzeit τ: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c}^2}\,\mathrm{d}t$

Mechanik von Teilchen: Eigenzeit τ, Weltlinie $x^i(\tau)$, Geschwindigkeit $u^i(\tau) = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}$ $[\eta_{ik}u^iu^k = -c^2]$, Beschleunigung $a^i = \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau^2}$ $[\eta_{ik}a^iu^k = 0]$, Ruhemasse m_0 [Photon: $m_0 = 0$], Kraft $f^i = m_0a^i$, Impuls $p^i = m_0u^i$.

Ruheenergie $E_0 = m_0c^2$, kinetische Energie $T = mc^2 - E_0$, $E^2 = m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2 = m^2c^4$ $[m = \frac{m_0}{\sqrt{1-[\frac{v}{c}]^2}}]$.

de Broglie: $p^i = \hbar k^i$.

Hydrodynamik:
Massendichte μ, Kraftdichte $\vec{k}$, Druck p, Energie-Impuls-Tensor T^{ik}, Energiedichte w, Impulsdichte $\vec{g}$, Energiestromdichte $\vec{S}$, Spannungstensor $\overleftrightarrow{\sigma}$ [= [−1] · Impulsstromdichte]:

$$T^{ik} = \left[\mu + \frac{p}{c^2}\right]u^iu^k + p\eta^{ik} = \begin{pmatrix} -\overleftrightarrow{\sigma} & c\vec{g} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & w \end{pmatrix}$$

Energiebilanz: $T^{4n}{}_{,n} = k^4$, Impulsbilanz: $T^{\alpha n}{}_{,n} = k^\alpha$;

die relativistische Eulergleichung ergibt sich so zu: $\frac{w+p}{c^2}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{grad}(p) + \left[\frac{k^4}{c} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right]\vec{v} = \vec{k}$.

In einem relativ zu Σ beliebig beschleunigten System Σ' gilt: [m_S - schwere Masse, m_T - träge Masse]

$$m_T\ddot{\vec{r}}\,' = m_S\vec{g} - m_T\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_0}{\mathrm{d}t^2} - \underbrace{2m_T\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}\,'}_{K_{\text{Coriolis}}} - \underbrace{m_T\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,')}_{K_{\text{Zentrifugal}}} - m_T\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,'.$$

Erfahrung: $m_T = m_S$; also auch Gravitation wesensgleich zu Trägheitskräften. Trägheitskräfte können aber wegtransformiert werden [mitbewegtes Inertialsystem z.B.], Gravitationskräfte in kleinen Bereichen auch [mitbewegtes Inertialsystem; nur lokal!] ⇒ „Wegtransformation“ der Gravitation überall durch **gekrümmte Raum-Zeit** [*pseudo-Riemannscher Raum*].

Riemann'sche Geometrie:

Metrischer Tensor / Metrik: g_{ik} , mit $\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k$, $g_{ik} = g_{ki}$, $\det(g_{ik}) \neq 0$ $[\Rightarrow \exists g^{ij} : g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k]$.

Koordinatentransformation: $x'^i = x'^i(x^j)$ mit $\det(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}) \neq 0$, dann: $[\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x^j} = \delta^i_j]$

$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\,\mathrm{d}x'^m$ $\qquad \mathrm{d}x'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j$ $\qquad \mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = g'_{mn}\,\mathrm{d}x'^m\,\mathrm{d}x'^n$

$g'_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x^j}{\partial x'^n}g_{ij}$

Vektortransformation: $A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}A^j$ [transformiert wie Koordinatendifferentiale; ∄ Koordinatenvektor!].

[2-stufiger] Tensor: $A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^l}A^{jl}$. $[A_i = g_{ik}A^k,\ A_{ik} = g_{ij}g_{kl}A^{jl},A^i_k = g_{kl}A^{il},A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}A_j,\ A'_{ik} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k}A_{jl}]$

Skalarprodukt: $A_iB^i = g_{ik}A^iB^k = A^iB_i = A'_iB'^i$

Theorie invariant gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen; sie heißt kovariant.

Lokal nichtrotierende Systeme [ohne Trägheitskräfte] sind fest gegenüber dem Fixsternhimmel [„Mach'sches Prinzip“].

Koordinatensysteme mit $g_{mn} \equiv \eta_{mn}$ nennen wir kurz „Inertialsystem“. [Eigentlich zusätzlich kartesische Koordinaten nötig.]

Im Allgemeinen [gekrümmte Raum-Zeit] kann man jedoch nur $g_{mn} = \eta_{mn}$ in einem Punkt $\underline{P}$ erreichen [unter der Annahme einer Lorentz-Mannigfaltigkeit ⇒ Signatur $(+,+,+,-)$]; das System heißt „lokales Minkowski-System“.

Verschwindet zusätzlich der lineare Term im Punkt $\underline{P}$ $[g_{ik,m}(\underline{P}) = 0]$, so gilt $g_{mn} = \eta_{mn}$ in einer Umgebung von $\underline{P}$; dieses System heißt „lokales Inertialsystem“.

⇒ dort wie Minkowski-Raum mit speziell-relativistischen Gesetzen. [„Äquivalenzprinzip“]

Kovariante Ableitung eines Tensors $\frac{\mathrm{D}\,T^{ab\dots}_{c\dots}}{\mathrm{D}\,x^i} = T^{ab\dots}_{c\dots;i} = \nabla_i T^{ab\dots}_{c\dots}$ ist ein Tensor, der im lokalen Inertialsystem mit der partiellen Ableitung übereinstimmt.

Christoffel-Symbole: $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{am}\left[g_{mb,c} + g_{mc,b} - g_{bc,m}\right]$

$[f_{;a} = f_{,a}$, $T^a_{;m} = T^a_{,m} + \Gamma^a_{mn} T^n$, $T_{a;m} = T_{a,m} - \Gamma^n_{am} T_n$, $T^a_{bc;d} = T^a_{bc,d} + \Gamma^a_{dm} T^m_{bc} - \Gamma^m_{bd} T^a_{mc} - \Gamma^m_{cd} T^a_{bm}$, $g_{ab;i} = 0$ $]$

$\Gamma^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{cb}$

Übertragungsvorschrift von spezieller zu allgemeiner Relativitätstheorie:

Man formuliere ein Gesetz lorentzinvariant in einem Inertialsystem und ersetze partielle durch kovariante Ableitungen, sowie η_{ik} durch g_{ik}.

[Äquivalenz- und Kovarianzprinzip automatisch erfüllt; bei höheren kovarianten Ableitungen kommt es auf die Reihenfolge an → Übergang nicht eindeutig!]

Mechanik: $m_0 \dot{u}_i = f^i$, mit $\dot{u}^i = \frac{\mathrm{D}\,u^i}{\mathrm{D}\,\tau} = u^i_{;n} u^n$ und der Eigenzeit τ [$g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2$, nur für zeitartige Teilchen].

Für $f^i = 0$ [keine nicht-gravitative Kraft] folgt: $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,\lambda}\left[\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 x^m}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^m_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} = 0$

, wobei $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}$ der Tangentenvektor an die Bahn $x^i(\lambda)$ ist $\Rightarrow$ dieser ist konstant / wird nur parallel verschoben [→ „geradeste Kurve“ / „**Geodätische**“].

Lagrange-Funktion L, $F = L^2$ $\Rightarrow$ $F = g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} = const.$ auf den Geodätischen; $F \begin{cases} > 0 & \text{- raumartig} \\ = 0 & \text{- lichtartig} \\ < 0 & \text{- zeitartig} \end{cases}$.

[Vergehende Eigenzeit $\Delta\tau$ auf Geodäte von Punkt A nach B maximal gegenüber anderen.]

Auf der Geodäten gilt [nach Lagrange II.]: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$.

Elektrodynamik: $F_{mn;a} + F_{na;m} + F_{am;n} = 0$, $F^{mn}_{\ ;n} = \mu_0 \jmath^m$. [Vakuum]

Hydrodynamik: Ohne äußere, nicht-gravitative Kraftdichte: $T^{ik}{}_{;k} = 0$, $T^{ik} = \left[\mu + \frac{p}{c^2}\right] u^i u^k + p\,g^{ik}$.

Dies ist analog [mit $h^n_i = g^n_i + \frac{1}{c^2} u^n u_i$]: $\dot{\mu} + [\mu + \frac{p}{c^2}] u^k{}_{;k}$ und $[\mu + \frac{p}{c^2}]\dot{u}^n + h^{ni} p_{,i} = 0$.

Einsteinsche Feldgleichungen: [rein gravitativ!]

$\kappa = 8\pi\frac{G}{c^4}$, $R^a{}_{msq} = \Gamma^a{}_{mq,s} - \Gamma^a{}_{sm,q} + \Gamma^a{}_{ns}\Gamma^n{}_{mq} - \Gamma^a{}_{nq}\Gamma^n{}_{ms}$ - Riemannscher Krümmungstensor , $R_{ik} = R^a{}_{iak}$ - Ricci-Tensor , $R = R^i{}_i$ - Ricci-Skalar , $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik}$ - Einsteintensor:

$$G_{ik} = \kappa\, T_{ik}$$

$[\Leftrightarrow R_{ik} = \kappa\left[T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}\right],\ T = T^i{}_i]$

In einem geeigneten Grenzfall führen sie auf die Poissongleichung $\Delta U = 4\pi G\mu$; $T^{ik} = T^{ki}$ [Drehimpulserhaltung], $T^{ik}{}_{;k} = 0$; partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit höchstens linearem Term in höchster Ordnung für g_{ik}.

Der Krümmungstensor verschwindet genau dann, wenn die Raumzeit flach ist [nach Transformation] $\Leftrightarrow$ ein wegunabhängiger Paralleltransport von Vektoren vorliegt $\Leftrightarrow$ die Vertauschbarkeit kovarianter Ableitungen gilt $\Leftrightarrow$ die geodätische Abweichung verschwindet .

[$\Rightarrow$ für Staub [Druck = 0]: $\dot{u}^k = 0$, $[\rho u^k]_{;k} = 0$; im Vakuum: $R_{ik} = 0$.]

Newton'scher Grenzfall: $g_{mn} = \eta_{mn} + f_{mn}$ [f_{mn} klein, höchstens linear in Koordinaten], zeitlich langsame Veränderungen [Ableitungen $_{;4} \approx 0$] , $u^4 \approx c$ und $T^{44} \approx \mu c^2$ [μ - Massendichte] dominierend [$v \ll c$, bzw. kinetische klein gegen Ruheenergie!].

$$R^a{}_{mbn} = \frac{1}{2}\eta^{as}\left[f_{sn,mb} + f_{mb,sn} - f_{mn,bs} - f_{sb,mn}\right] + \mathcal{O}([f_{ij,kl}]^2)$$

Aus Einsteingleichungen $\Rightarrow$ $R_{44} = \frac{1}{2}\kappa\mu c^2$, $R_{44} = -\frac{1}{2}\Delta f_{44}$ $\Rightarrow$ $g_{44} = -1 \overbrace{- \frac{2}{c^2} U}^{f_{44}}$.

$$\Gamma^m{}_{nj} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\hat{g}^{-1}\partial_j \hat{g}\right),\ \det(\hat{g}) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(\ln(\hat{g}))} \Rightarrow A^n_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\sqrt{-g} A^n\right]_{,n} .$$

$$R^a{}_{msq} A^m = [D_s, D_q]\, A^a \qquad , R_{mnkl} = -R_{nmkl} = -R_{mnlk} = R_{klmn}$$

Schwarzschild-Lösung:

allgemeine, kugelsymmetrische Lösung der *Vakuum-Einstein-Gleichungen* [in entsprechenden Koordinaten].

Als allgemeinster Ansatz $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\lambda(r,t)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left[\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi^2\right] - \mathrm{e}^{\nu(r,t)}\,c^2\,\mathrm{d}t^2$.

Unter Verwendung der Vakuum-Einsteingleichungen lässt sich zeigen [$\tilde{\nu}(r) = \nu(r,t) - f(t)$, $\mathrm{d}\tilde{t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}f(t)}\,\mathrm{d}t$]:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\lambda(r)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left[\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi^2\right] - \mathrm{e}^{\tilde{\nu}(r)}\,c^2\,\mathrm{d}\tilde{t}^2 .$$

Und weiter: $e^{\tilde{\nu}} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_S}{r}$ [Schwarzschildradius r_S, t-Abhängigkeit von ν in Koordinaten wegtransformiert.]

Somit ergeben sich das Linienelement $\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r_S}{r}} + r^2\left[\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi^2\right] - \left[1 - \frac{r_S}{r}\right] c^2\,\mathrm{d}t^2$, ${\Gamma^1}_{11} = -\frac{r_S}{2r[r-r_S]}$

, ${\Gamma^1}_{22} = [r_S - r]$, ${\Gamma^1}_{33} = [r_S - r]\sin^2(\vartheta)$, ${\Gamma^1}_{44} = \frac{r_S}{2r[r-r_S]}\left[1-\frac{r_S}{r}\right]^2$, ${\Gamma^2}_{12} = \frac{1}{r}$, ${\Gamma^2}_{33} = -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$,

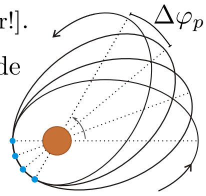
${\Gamma^3}_{13} = \frac{1}{r}$, ${\Gamma^3}_{23} = \cot(\vartheta)$, ${\Gamma^4}_{14} = \frac{r_S}{2r[r-r_S]}$. $r_S = \frac{2GM}{c^2}$, $G = 6{,}673\,84 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s^2}}$

Für $r > r_S$ geht das Linienelement in das des Minkowski-Raumes über $\Rightarrow$ die Raumzeit heißt „asymptotisch flach".

Birkhoff-Theorem: Jede kugelsymmetrische Vakuumlösung ist [bei geeigneter Koordinatenwahl] unabhängig von t. Solange t eine zeitartige Variable ist, heißt die Raumzeit dann „statisch".

Klassische Effekte der ART:

- Periheldrehung [Perihel = Sonnennächster Punkt der Umlaufbahn um die Sonne; $r_{S,\text{Sonne}} \approx 3\,\text{km}$, $m_\text{Planet} < M_\text{Sonne}$]:
  o.B.d.A. $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2} = const.$ $\Rightarrow$ vereinfachte Lagrangefunktion [auf Geodäten!] $F = \frac{1}{1-\frac{r_S}{r}}\left[\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right]^2 + r^2\left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right]^2 - \left[1-\frac{r_S}{r}\right]\left[\frac{\mathrm{d}[ct]}{\mathrm{d}\tau}\right]^2$
  ; φ und ct sind zyklische Koordinaten $\Rightarrow$ $A = \left[1-\frac{r_S}{r}\right]\frac{\mathrm{d}[ct]}{\mathrm{d}\tau}$ $\left[\frac{\text{Energie}}{c\,m_0}\right]$, $B = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}$ $\left[\frac{\text{Drehimpuls}}{m_0}\right]$ sind Konstanten.
  Über $u^i u_i = -c^2$ ergibt sich $[\rho := \frac{1}{r},\ ' \mathrel{\hat{=}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}]$ $\rho'' + \rho = \frac{GM}{B^2} + \frac{3GM}{c^2}\rho^2$ [dies ist iterativ lösbar!].
  In erster Näherung gilt $\rho = \frac{GM}{B^2}\left[1 + \varepsilon\cos\left(\left[1 - \frac{3G^2M^2}{c^2B^2}\right]\varphi\right)\right]$, was einer Drehung mit einer Periode größer 2π entspricht [um wieder ρ_min zu erreichen]:
  $$\Delta\varphi_p = \frac{6\pi GM}{c^2 a[1-\varepsilon^2]} \quad . \qquad \left[a = \frac{B^2}{GM[1-\varepsilon^2]}\right]$$



- Lichtablenkung:
  Analog mit $g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} = 0$ ergibt sich $[\rho := \frac{1}{r},\ ' \mathrel{\hat{=}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}]$ $\rho'' + \rho = \frac{3GM}{c^2}\rho^2$ [dies ist iterativ lösbar!].
  In erster Näherung ergibt sich $\rho = \frac{1}{D}\sin(\varphi) + \frac{GM[1+\cos(\varphi)]^2}{c^2D^2}$, was für $\rho = 0$ $[r = \pm\infty]$ eine Winkeldifferenz von
  $\Delta\varphi = \pi + \frac{4GM}{c^2 D}$ ergibt [D - minimaler Abstand von raumkrümmender Masse; ohne Raumkrümmung $\Delta\varphi = \pi$].
- Gravitative Rotverschiebung:
  Für 2 ruhende Punkte ergibt sich die Frequenz periodischer Vorgänge im Schwarzschild-Fall zu $\nu_i = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_i}}}$, was für $r_2 > r_1 > r_S$ bedeutet: $\nu_1 > \nu_2$ $\Leftrightarrow$ Rotverschiebung [Sender P_1, Empfänger P_2].
  [Gilt auch umgekehrt!]

Kugelsymmetrisches Sternmodell:

Als statische [zeitunabhängige] Lösung der Einsteingleichungen im Schwarzschildfall für eine Flüssigkeit [Druck p, Massendichte μ] ergibt sich mit $m(r) = \int_0^r 4\pi\tilde{r}^2\,\mathrm{d}\tilde{r}$ und dem stetigen Anschluss an den Außenraum die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm}{r^2}\mu\left[1 + \frac{p}{\mu c^2}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 p}{c^2}\right]\left[1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right]^{-1}$.

Mit $\mu = \mu(p)$ bis auf 1 Konstante alles bestimmt [z.B. Zentraldruck p_C].

Schwarze Löcher in Schwarzschild-Näherung:

Mit Eddington-Finkelstein-Koordinaten $[r = r, \vartheta = \vartheta,\ \varphi = \varphi,\ v = ct + r + r_S\ln\left(\left|\frac{r}{r_S} - 1\right|\right)]$ ergibt sich das Linienelement zu

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}v + r^2[\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi^2] - \left[1 - \frac{r_S}{r}\right]\mathrm{d}v^2 \ ,$$

für alle $r \in \mathbb{R}^+$ regulär.

Bei $r = r_S$ ist eine Nullhyperfläche [für Hyperfläche $f(x^i) = 0$ gilt, dass der Normalenvektor $n^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ lichtartig $[n^i n_i = 0]$ ist], weshalb der Normalenvektor n^i gleichzeitig tangential ist und beim Fortschreiten entlang der Nullhyperfläche

$[\mathrm{d}x^i \propto n^i]$ gilt also $\quad \mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \propto g_{ik}n^i n^k = 0$.

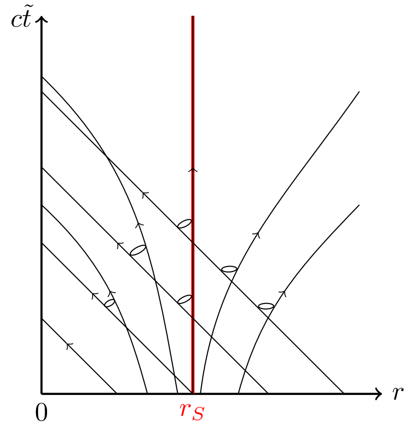
Die Zukunftslichtkegel liegen alle auf einer Seite der Nullhyperfläche und tangieren sie. D.h. in die Zukunft gerichtete Weltlinien können die Nullhyperfläche nur in einer Richtung durchqueren.

Ereignishorizont: Der Rand eines Raumzeit-Bereichs, aus dem keine in die Zukunft gerichteten zeit- oder lichtartigen Weltlinien ins räumlich Unendliche gelangen können.

Für $f = r - r_S = 0$ gilt $n_i \frac{\partial f}{\partial x^i} = (1,0,0,0)$ und $g^{11} = 0$ $[\Rightarrow \mathrm{d}s^2 = 0]$; die Nullhyperfläche ist der Ereignishorizont, dieser ist räumlich beschränkt. Bereich $r < r_S$ heißt „schwarzes Loch“.

Radiale Nullgeodäten: $\vartheta = const.$, $\varphi = const.$, somit $\mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v - \left[1 - \frac{r_S}{r}\right]\mathrm{d}v^2$. Die Lösungen sind $v = const.$, $v = 2r + 2r_S \ln\left(\left|\frac{r}{r_S} - 1\right|\right) + const.$ [, $r = r_S = const.$].

Für $\tilde{t} = \frac{v-r}{c}$, einer im gesamten Bereich zeitartigen Koordinate, ergeben sich radial folgende Verläufe:



Rotierende, ungeladene schwarze Löcher [Kerr-Lösung, $G = c = 1$, $J = |\vec{J}|$, $\vec{J} \parallel \vec{e}_z$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$, $r_S = 2M$]:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2 + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)}{r^2 - 2Mr + \frac{J^2}{M^2}}\,\mathrm{d}r^2 + \left[r^2 + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta^2 + \left[\left[1 + \frac{2Mr}{r^2 - 2Mr + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)}\right]\left[r^2 - 2Mr + \frac{J^2}{M^2}\right]\sin^2(\vartheta)\right.$$
$$\left. - \frac{4J^2 r^2 \sin^4(\vartheta)}{\left[r^2 + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)\right]\left[r^2 - 2Mr + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)\right]}\right]\mathrm{d}\varphi^2 - 2\frac{2Jr\sin^2(\vartheta)}{r^2 + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t - \left[1 - \frac{2Mr}{r^2 + \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)}\right]\mathrm{d}t^2$$

Diese Metrik ist asymptotisch flach, stationär [Koeffizienten unabhängig von t] und axialsymmetrisch [K. u. v. φ].

Für $J = 0$ ergibt sich die Schwarzschild-Metrik.

Für $0 < |J| \le M^2$ ist der Ereignishorizont bei $r_+ = M + \sqrt{M^2 - \frac{J^2}{M^2}}$ [Nullhyperfläche; dort $g_{11} = \infty$ - Koordinatensingularität],

für $r = 0$ $[\vartheta = \frac{\pi}{2}]$ gibt es eine echte Singularität und

bei $r_0 = M + \sqrt{M^2 - \frac{J^2}{M^2}\cos^2(\vartheta)}$ gilt $g_{44} = 0$.

In der Ergosphäre $[r_+ < r < r_0]$ ist t weiterhin die zeitartige Koordinate; $\varphi = const.$ ist hier nicht möglich, es gilt $J\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} > 0$ [„Mitführungseffekt“].