Aussagenlogik: Schluss [Argument] = Prämisse[n] [Grund / Gründe] & Konklusion

Die Wahrheit der Schlussformen ist nicht beweisbar; sie ist evident [Rationalität / menschliche Vernunft]!

Prämissenindikatoren z.B.: also, folglich, daher, demnach, infolgedessen, so dass, deswegen, mithin, somit, demzufolge, darum, ergo.

Konlusionsindikatoren z.B.: denn, nun, nämlich, doch, schließlich, da.

Logik: folgerichtiges Schließen - deduktiv: Konklusion folgt zwingend aus den genannten Prämissen.
induktiv: aus Empirie werden Aussagen abstrahiert.

Enthymem: Ein Schluss, welcher erst durch Ergänzung anderer Prämissen zwingend wird.

Subjunktion [„Konditional", „Implikation"]: $p \to q$ [p - Antecedens, q - Succedens]; Konjunktion: $p \wedge q$; Negation: $\neg p$; Adjunktion: $p \vee q$ [inklusives Oder]; Kontravalenz: $p \not\leftrightarrow q$ [exklusives Oder]; Äquivalenz: $p \leftrightarrow q$.

Bezeichnungen:

A - **A**nnahme [Prämisse]

1	(1)	a	A

,

$\to B$ - Subjunktions**B**eseitigung

1	(1)	$a \to b$	A
2	(2)	a	A
1,2	(3)	b	$\to B, 1, 2$

,

$\to E$ - Subjunktions**E**inführung

1	(1)	$a \wedge b$	A
1	(2)	a	$\wedge B, 1$
	(3)	$(a \wedge b) \to a$	$\to E, \underline{1}, 2$

,

$\wedge B$ - Konjunktions**B**eseitigung

1	(1)	$a \wedge b$	A
1	(2)	a	$\wedge B, 1$

,

$\wedge E$ - Konjunktions**E**inf.

1	(1)	a	A
2	(2)	b	A
1,2	(3)	$a \wedge b$	$\wedge E, 1, 2$

,

$\neg E$ - Negations**E**inf.

1	(1)	$a \to (b \wedge \neg b)$	A
1	(2)	$\neg a$	$\neg E, 1$

,

$\neg\neg B$ - Negations**B**eseitigung

1	(1)	$\neg\neg a$	A
1	(2)	a	$\neg\neg B, 1$

,

$\vee E$ - Adjunktions**E**inf.

1	(1)	a	A
1	(2)	$a \vee b$	$\vee E, 1$

,

$\vee B$ - Adjunktions**B**eseitigung

1	(1)	$a \vee b$	A
2	(2)	$\neg b$	A
1,2	(3)	a	$\vee B, 1, 2$

,

$\leftrightarrow E$ - Äquivalenz**E**inführung

1	(1)	$a \to b$	A
2	(2)	$b \to a$	A
1,2	(3)	$a \leftrightarrow b$	$\leftrightarrow E, 1, 2$

,

$\leftrightarrow B$ - Äquivalenz**B**eseitigung

1	(1)	$a \leftrightarrow b$	A
1	(2)	$a \to b$	$\leftrightarrow B, 1$

,

$\not\leftrightarrow E$ - Kontravalenz**E**inf.

1	(1)	$a \to \neg b$	A
2	(2)	$\neg a \to b$	A
1,2	(3)	$a \not\leftrightarrow b$	$\not\leftrightarrow E, 1, 2$

,

$\not\leftrightarrow B$ - Kontravalenz**B**eseitigung

1	(1)	$a \not\leftrightarrow b$	A
1	(2)	$a \leftrightarrow \neg b$	$\not\leftrightarrow B, 1$

.

Bei der **Subjunktionseinführung** entfällt die Abhängigkeit von den Abhängigkeiten des Antecedens [$\to$ unterstrichen]!

Falls Schluss formal falsch: „Fehlschluss"

Bindungsstärke: [stark] $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\not\leftrightarrow$, $\to$, $\leftrightarrow$ [schwach] ; Klammern am stärksten.

1	(1)	$a \to b$	A
2	(2)	$a \wedge c$	A
2	(3)	a	$\wedge B, 3$
1,2	(4)	b	$\to B, 1, 3$

Die **Konklusion** steht stets in der letzen Zeile eines Schlusses.

Prämissen hängen nur von sich selbst ab.

Ordinalskalierung:
Fortlaufende Benennung der einzelnen Zeilen mittels Zeichen einer bekannten Ordnungsrelation [z.B. natürliche Zahlen].

Für formal gültige Schlüsse alle Zwischenschritte mit den oben benannten Operationen einzeln nötig.

Zeichen links der Ordinalskala zeigen die vorausgesetzten Prämissen [Annahmen - A]; nicht von schon daraus gefolgerten [Zwischen-]Schlüssen, sondern wirklich von den Prämissen.

Die reine Logik unter Verwendung obiger Regeln und Symbole heiße „Kalkül des natürlichen Schließens" [**KNS**].

Schlüsse [$\to$ mindestens eine Regelanwendung] in KNS dargestellt heißen „**Ableitung**" und werden als „**Sequenz**" „$P_1, \ldots, P_n \vdash K$" dargestellt. Ist eine Zeile einer Ableitung voraussetzungslos, so heißt sie „**Theorem**". Ist die letzte

Zeile einer Ableitung ein Theorem, so heißt diese Ableitung „**Beweis**“ [„ $\vdash K$“].
Theoreme:

- Satz von der Identität [**SVI**]: $P \to P$
- Satz vom ausgesprochenen Widerspruch [**SVW**]: $\neg[P \wedge \neg P]$ [principium contradictionis exclusi]
- Satz vom ausgeschlossenen Dritten [**SVD**]: $P \vee \neg P$ [tertium non datur]

Indirektes Schlussfolgern: $\neg P$ annehmen und auf Widerspruch $Q \wedge \neg Q$ führen $\Rightarrow$ P laut SVD bewiesen.
[reductio ad absurdum]

Neben den obigen **Grundregeln** gibt es Abkürzungen, die sogenannten „**zulässigen Regeln**“:

De Morgansche Regel [**DM**]:

1	(1)	$\neg[P \wedge Q]$	A
1	(2)	$\neg P \vee \neg Q$	DM, 1

Disjunktiver Syllogismus [**DS**]:

1	(1)	$P \nLeftrightarrow Q$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	$\neg Q$	DS, 1, 2

Hypothetische Abschwächung [**HA**]:

1	(1)	P	A
1	(2)	$Q \to P$	HA, 1

Kettenschluss [**KS**]:

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$Q \to R$	A
1,2	(3)	$P \to R$	KS, 1, 2

Konstruktives Dilemma [**KD**]:

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$P \to R$	A
3	(3)	$Q \to R$	A
1,2,3	(4)	R	KD, 1, 2, 3

Kontraposition [**KP**]:

1	(1)	$P \to Q$	A
1	(2)	$\neg Q \to \neg P$	KP, 1

Modus Tollens [**MT**]:

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
1,2	(3)	$\neg P$	MT, 1, 2

Stabilitätsprinzip [**SP**]:

1	(1)	P	A
1	(2)	$\neg\neg P$	SP, 1

[Wahrheitswerte: 1 - wahr, 0 - falsch]
Tautologie: formal wahre Aussage [Spalte in Wahrheitstabelle mit ausschließlich 1].
Kontradiktion: formal falsche Aussage [Spalte in Wahrheitstabelle mit ausschließlich 0].
Kontingente Aussage: formal wahr und falsch möglich [Spalte in Wahrheitstabelle mit 0 und 1].
„Ex falso sequitur quod libet.“

„Verum sequitur ex quod libet.“

Prädikatenlogik / Quantorenlogik: [erster Stufe]

Prädikate [Eigenschaften] mittels Großbuchstaben , **Gegenstände** [Objekte, Personen, . . .] mittels Kleinbuchstaben.
Gegenstandsvariable [allgemein!] und Gegenstandskonstante [bestimmter Gegenstand!] zu unterscheiden.

Quantoren: $\forall$ **Allquantor** , $\exists$ **Existenzquantor** , Scope [Reichweite] von Operatoren über Klammern.
Vorkommen von Gegenstandsvariablen: „frei“ - ohne Quantor; „unfrei“ bzw. „gebunden“ - mit Quantor.

Mögliche Formen von $\forall$ in der Umgangssprache z.B.: „alle“, „jede/r“, Artikel, Auslassen, „nur“, „Relativpronomina“.

Mögliche Formen von $\exists$ in der Umgangssprache z.B.: „einige“, „mindestens eine/r“, ...

$\forall E$ - Allquantoreinführung

1	(1)	Pa	A
1	(2)	$\forall x[Px]$	$\forall E, 1$

, wobei:

I. die Variable, mit der quantifiziert wird, nicht in der quantifizierten Aussage vorkommt [hier: x in P weder frei noch unfrei];

II. die Konstante, über die quantifiziert wird, nicht frei vorkommt in

  i. den vorausgesetzten Annahmen der quantifizierten Aussage [hier: a in den Abhängigkeiten von (1)],

  ii. der quantifizierten Aussage [hier: (2)].

$\forall B$ - Allquantorbeseitigung

1	(1)	$\forall x Px$	A
2	(2)	Pa	$\forall B, 1$

.

$\exists E$ - Existenzquantoreinführung

1	(1)	Pa	A
1	(2)	$\exists x[Px]$	$\exists E, 1$

.

$\exists B$ - Existenzquantorbeseitigung

1	(1)	$\exists x[Px]$	A
2	(2)	$Pa \rightarrow C$	A
1,2	(3)	C	$\exists B, 1, 2$

, wobei die freie Variable [hier: a] nicht vorkommt [weder frei noch unfrei] in

I. dem quantifizierten Ausdruck [hier: (1)]

II. den Voraussetzungen der Konklusion [hier: von (1) und (2)]

III. der Konklusion [hier: (3)]

$\forall E$ und $\exists B$ heißen **kritische Regeln**, da die freie Variable [hier: a] vollkommen beliebig wählbar sein muss. [Siehe obige Regeln; i.e. vorher noch nicht weiter spezifiziert worden sein darf.]

Regeln der **quantorenlogischen Dualität** [**QD**]:

1	(1)	$\forall x[Ax]$	A
1	(2)	$\neg\exists x[\neg Ax]$	$\mathrm{QD}, 1$

,

1	(1)	$\neg\forall x[Ax]$	A
1	(2)	$\exists x[\neg Ax]$	$\mathrm{QD}, 1$

.

Bei mehrstelligen Prädikaten [Pxy] auch mehrere Quantoren möglich [$\forall x \exists y Pxy$]; der am weitesten links stehende Quantor heißt dann *Hauptquantor* und ist derjenige, auf den Regeln angewendet werden.